



ISSN 2410-2547
DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 102

Заснований у 1965 р.

КИЇВ 2019

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

<i>П.В. Алявдін</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>А.В. Перельмутер</i> , д-р техн. наук
<i>Ю. Аткочиунас</i> , д-р техн. наук (Литва)	<i>О.Ф. Даценко</i> , д-р техн. наук
<i>О.М. Белостоцький</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>П.В. Ясній</i> , д-р техн. наук
<i>І. Елішаков</i> , д-р техн. наук (США)	<i>В.В. Гайдайчук</i> , д-р техн. наук
<i>С.Н. Кривошапко</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>Г.М. Іванченко</i> , д-р техн. наук
<i>С.Ю. Фіалко</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>П.П. Лізунов</i> , д-р техн. наук
<i>Чан Дик Тінг</i> , д-р техн. наук (В'єтнам)	<i>І.І. Солодей</i> , д-р техн. наук
<i>Л.М. Лобанов</i> , д-р техн. наук, академік НАН України	

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 21 червня 2019 р. (протокол № 24).

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 102 / Голов. ред. В.А. Баженов. – К.: КНУБА, 2019. – 265 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>
Адреса редакційної колегії:
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.
м. Київ, 03037
Тел.: (044) 248-3040
E-mail: omtc@knuba.edu.ua

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61
© КНУБА, 2019

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І ФОРМОЗМІНЕННЯ МАСИВНИХ І ТОНКОСТІННИХ ОБ'ЄКТІВ

В.А. Баженов,

д-р техн. наук, професор

Ю.В. Максим'юк,

канд. техн. наук, доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.3-12

В роботі наведені результати математичного моделювання процесів формозміння масивних і тонкостінних тіл обертання під дією вимушених переміщень та неусталених температурних полів при великих незворотніх деформаціях і перемінних граничних умовах. В якості прикладів розглянуті операції витяжки циліндричного стакану і гарячої осадки циліндричної заготовки.

Ключові слова: напружено-деформований стан, формозміння, вісесиметричні тіла, масивні і тонкостінні об'єкти, неусталене температурне поле, універсальний СЕ, моментна схема скінчених елементів МССЕ, витяжка циліндричного стакану, гаряча осадка циліндричної заготовки.

Вступ. Процеси обробки металів тисненням відзначаються суттєвим формозмінням заготовок під дією пуассонів, штампів і інших інструментів нерідко в умовах нерівномірного нагріву. Крім того, суттєвий вплив на перебіг зміни їх напружено-деформованого стану визначають умови взаємодії з контактуючими тілами. Подальше вдосконалення різноманітних технологічних процесів обробки металів тисненням значною мірою залежить від повноти і достовірності інформації про особливості зміни картини НДС заготовок в процесі деформування. В зв'язку з цим зростає актуальність розробки методів дослідження пластичного формозміння з урахуванням геометричної нелінійності при великих фізично-нелінійних деформаціях, контактної взаємодії та умов теплообміну на граничних поверхнях.

В даній роботі в якості вихідних, розрахункових співвідношень і алгоритмів розв'язку систем нелінійних рівнянь прийняті наведені в публікаціях авторів [1, 5, 7].

1. Особливості розв'язання нестационарної задачі теплопровідності при формозмінні. В [2, 6] викладена методика визначення нестационарних температурних полів і пов'язаних з ними полів напружень, деформацій і переміщень в геометрично лінійній постановці. Це дозволяло розглядати задачі нестационарної теплопровідності і визначення НДС незалежно. У випадку дослідження процесів суттєвого формозміння така можливість спрощення організації обчислювального процесу за рахунок його розподілення на два незалежних послідовних етапи відсутня, оскільки обидві задачі пов'язані між собою. На кожному кроці по параметру навантаження розв'язок задачі теплопровідності відбувається в проміжній

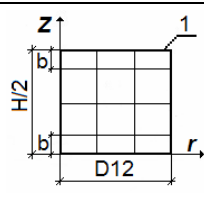
розрахунковій конфігурації з відповідним Δt . Крім того, розміри кроку повинні задовольняти умовам збіжності обох задач.

В якості контрольного прикладу розглянемо сталевий циліндричний зразок висотою $H=300$ мм, нагрітий в початковий момент часу $t=0$ до температури $T=11600^\circ\text{C}$. Стиск зразка проходить зі швидкістю $V=45$ мм/с. теплофізичні константи матеріалу зразка: питома теплоємність $c=0,166$ Ккал/м \cdot с, коефіцієнт температуропровідності $\lambda=0,2$ м 2 /г. На деформоване тіло накладаються граничні умови теплообміну III-го роду, що найбільш відповідає реальним умовам взаємодії з зовнішнім середовищем: на торцевих поверхнях коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_k=5000$ Ккал/м 2 ·г $^\circ\text{C}$; температура зовнішнього середовища $T=2000^\circ\text{C}$; на бокових поверхнях коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_5=5000$ Ккал/м 2 ·г $^\circ\text{C}$, температура навколишнього середовища $T=200^\circ\text{C}$. Стиск проходить до 50% початкової висоти зразка. Коефіцієнт тертя на торцях циліндра прийнятий рівним нулю.

Поле температур, визначене в результаті розв'язання задачі теплопровідності, порівнюються з експериментальними і теоретичними результатами, приведені в роботі [4].

Сітка скінчених елементів нанесена на поперечний переріз заготовки таким чином, щоб сіткові координати, паралельні осі Z^2 , відповідали положенню термопар в тілі засовки в експерименті. Виконане дослідження збіжності розв'язання МССЕ згущенням сітки в зоні висотою $b=10$ мм, так як найбільш значні зміни температури в процесі стискання проходять в цій зоні, близькій до торця зразка.

Таблиця 1

	N			Експеримент [4]
	1	2	4	
	9580	10220	10200	9900
	Δt			
	$t/3$	$t/7.5$	$t/15$	
	10280	10230	10200	

В таблиці 1 наведені результати дослідження збіжності розв'язання при трьох розбивках сіткової області: перший результат отриманий на висоті скінченого елемента $h_i=b$ ($N=1$), другий – $h_i=b/2$ ($N=2$), третій – при $h_i=b/4$ ($N=4$). Результати дослідження показали, що температура в точці I при $N=2$ і $N=4$ мають однакову величину. Також були проведені дослідження впливу кроку по часу. В таблиці 1 t – час осадки заготовки до 50% первинної висоти при сталій швидкості V_0 , Δt – величина кроку по часу, на який розбивається весь процес стиску зразка. Дослідження показали, що крок по часу $\Delta t=t/3$ взятий достатньо точно, так як подальше його зменшення в 2,5 і 5 разів мало впливають на результат. Порівняння температур в точці I після закінчення процесу стискання показали достатньо хорошу збіжність з даними експерименту, наведеному в роботі [4], різниця температур складає порядку 2%.

2. Алгоритм розв'язання контактної задачі зі змінними граничними умовами. В загальному випадку взаємодії об'єктів, що деформуються, з

жорсткою перепною довільної конфігурації необхідне виконання умов примикання і ковзання контактних поверхонь. Це можна забезпечити закріпленням вузлів сіткової області від переміщень, нормальних до поверхні контакту. З цієї метою необхідно ввести систему координат $Z^{i''}$, зв'язану з границею жорсткої перепони. На ділянках, де напрям осей $Z^{i''}$ не співпадає з напрямком осей базисної системи координат $Z^{i'}$ (рис. 1) з'являється

необхідність перетворення компонент вектору реакцій в закріплених точках криволінійної ділянки із базисної системи координат в систему координат перепони

$$r^{n''} = R^{m'} C_m^{n''}, \quad (1)$$

де $C_m^{n''}$ - складові тензора перетворень

$$C_m^{n''} = \cos(\hat{n''m'}).$$

Формування матриці системи

розв'язувальних рівнянь відбувається в системі координат $Z^{i'}$. Вираз для варіації енергії в базисній системі координат має вигляд:

$$\delta W = K_{i'j'} U^{i'} \delta U^{j'}, \quad (2)$$

де $K_{i'j'}$ - матриця жорсткості.

Переміщення $U^{i'}$ в базисній системі координат виражаємо через переміщення U^m в системі координат $Z^{i''}$.

$$U^{i'} = U^m C_m^{i'}. \quad (3)$$

Тоді, вираз (2) буде мати вигляд

$$\delta W = \tilde{K}_{n''m''} U^{m''} \delta U^{n''}. \quad (4)$$

Формула для перетворення матриці жорсткості має вигляд

$$\tilde{K}_{n''m''} = K_{i'j'} C_m^{i'} C_n^{j'}. \quad (5)$$

Компоненти вектора переміщень, отримані в результаті вирішення задачі при перетворенні (5), наводяться у базисній системі координат.

Для розв'язку задач контактної взаємодії тіла, що деформується, з жорсткою перепною складної геометричної форми був розроблений алгоритм, який заснований на викладених вище положеннях.

На кожному кроці «n» виконується аналіз напружено-деформованого стану за результатами попереднього «n-1» кроку. За умови непроникнення відбувається закріплення окремих вузлів, в загальному випадку, що відрізняється від можливого закріплення вузлів на «n» кроці. У зв'язку з цим здійснюється пробна ітерація, після якої виконується перевірка реакцій в закріплених вузлах. Якщо останні змінюють знак на протилежний, вузли

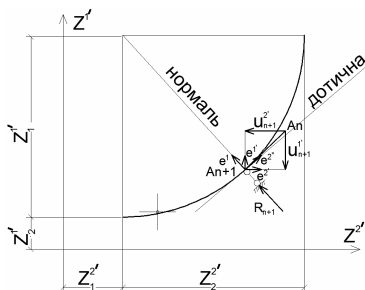


Рис. 1

відкріпляються. Після цього рішення на « n » кроці повторюється знову, але вже з відкоригованими вузлами.

Розглянемо, наприклад, умови контакту об'єкту, що взаємодіє з жорсткою перепоною з довільною формою границі (рис. 1).

Точка A_{n+1} закріплюється в тому випадку, якщо вона буде знаходитися в середині перепопи, якщо

$$A_{n+1} \in B, \quad U_{n+1}^1 = 0, \quad (6)$$

де B – область обмежена прямими $Z^1 = Z_2^1$, $Z^2 = Z_1^2$ і кривою $f(Z^1, Z^2) = 0$.

Відкріплення точок, контактуючих з жорсткою перепоною відбувається за умови

$$\left. \begin{array}{l} R_n^1 < 0 \\ R_n^2 > 0 \end{array} \right\} U_{n+1}^1 \neq 0; \quad (7)$$

у випадку, коли

$$\left. \begin{array}{l} R_n^1 \geq 0 \\ R_n^2 \leq 0 \end{array} \right\} U_{n+1}^1 = 0 \quad (8)$$

вузол залишається закріпленим.

Такий підхід дозволяє своєчасно відкріпляти вузли, користуючись інформацією про реакції, що виникають на даному кроці, а не на попередньому. Проте перерозподілення умов закріплення вузла призводить до повторного обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості на кожному кроці, що збільшує час розрахунку.

З метою зменшення часу розрахунку був апробований алгоритм, виключаючий проведення пробної ітерації: за результатами попереднього кроку здійснюється закріплення, після чого розв'язання продовжується за описаним вище алгоритмом розв'язання фізичних нелінійних задач. Після цього, вже за результатами кроку « n » аналізуються реакції в закріплених вузлах, і, за необхідності, виконується закріплення. За цим алгоритмом відбувається запізнювання корекції зміщення на крок, в наслідок чого в сусідніх закріплених вузлах виникає пара сил, дія якої є суттєвою для кроку, який розглядається. На наступному « $n+1$ » кроці відкріплений вузол починає рухатися. Невідповідність моделі до реальних умов руху точок тіла, що деформується, вздовж границі жорсткої перепопи усувається. Достовірність викладеного підходу обґрунтовано розв'язанням контрольного прикладу наведеного в роботі [3].

3. Витяжка циліндричного стакану. Витяжка циліндричного стакану відбувається за допомогою матриці, прижиму і пуасона, який тисне на середню частину заготовки у вигляді круглої пластини (рис. 2 (а)).

Глибина витяжки стакану, як правило, обмежується його розривом в місці, де локалізуються найбільші розтягуючі меридіональні напруження (σ_{22}) рис. 2 (б).

Мета дослідження полягає у вивченні характеру зміни меридіональних і окружних напружень, що виникають у віссиметричній заготовці в процесі її деформування, аналізу зусиль витяжки P , умов контакту з матрицею і пуасоном, які змінюються в процесі деформування, дослідження впливу зміни радіуса закруглення матриці і пуасона, її напружено-деформований стан.

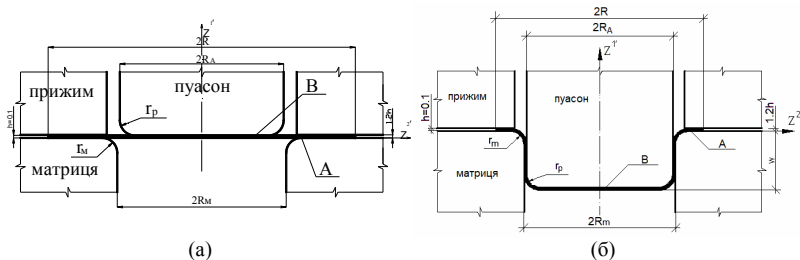


Рис. 2

Механічні характеристики матеріалу заготовки відповідають сталі типу Ст.10. Відношення радіусу отвору матриці R_m до початкового радіусу круглої пластини R дорівнює 0,583, відношення товщини пластини h до R становить 0,004. Зажим між прижимом і матрицею дорівнює 1,2. Радіус закруглення r матриці і пуасона однакові і становить $5h$. Оскільки, витяжка реалізується із застосуванням мастила, тертям можна знехтувати. Розв'язок задачі виконується у віссиметричній постановці, тому що наявність прижиму виключає можливість складкоутворення і локальну втрату стійкості. По товщині пластини достатньо використовувати один універсальний СЕ. По довжині пластини вздовж радіусу використовується 80 СЕ, що забезпечує апроксимацію округлень матриці і пуасона приблизно 10 СЕ.

Моделювання процесу витяжки здійснювалось до глибини W , на якій досягаються максимальні значення зусиль витяжки P . Як правило, максимальні значення P фіксується після того, як відбувається обхват матеріалом заготовки зкруглених кромки матриці пуасона. При цьому відбувається поступове закріплення точок, які входять в контакт зі зкругленими кромками матриці і пуасона, а також з горизонтальною площиною прижима. На рис. 3 схематично показана зміна умов контакту заготовки з інструментом на різних етапах деформування.

Дослідження впливу величини зкруглення матриці та пуасона r на основні параметри напруженого стану заготовки проводилося в діапазоні зміни r від $5h$ до $9h$. Графіки зміни зусилля витяжки P при деформуванні заготовки представлені на рис. 4 (а).

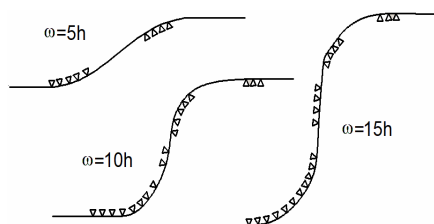


Рис. 3

Максимальні зусилля P в усіх 3-х випадках відповідають

моменту появи вертикальної стінки стакану. Виявилось, що величина P_{max}

змінюється при збільшенні радіусу зкруглення r на 7,5% при $r=7h$ і на 14% при $r=9h$ порівняно із значення $P_{max}=5h$.

На рис. 4 (б) представлені графіки зміни меридіональних напружень, їх згинної та мембранної складових в залежності від величини радіусу зкруглення r . Встановлено, що зростання меридіональних напружень σ_{22} при зменшенні r від 9 до $5h$ відбувається тільки за рахунок збільшення складових згину σ_{22} . Мембранна складова σ_{22} залишається практично незмінною при всіх досліджуваних значеннях радіусу r .

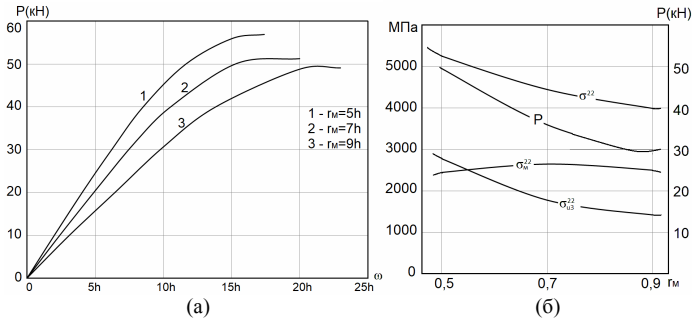


Рис. 4

Таким чином проведені чисельні дослідження дозволили зробити висновок, що зміна геометрії інструмента незначною мірою впливає на величину зусилля витяжки P_{max} , проте суттєво впливає на величину максимальних меридіональних напружень.

4. Осадка заготовки з урахуванням впливу температури інструменту. Великий вплив на напружено-деформований стан заготовок, що осаджуються має температура преса, яка, як правило, в декілька разів менше температури деталі, що піддається обробці. Від температури преса, від швидкості відведення тепла з дотичних торців оброблюваних заготовок залежить характер зміни фізико-механічних характеристик матеріалу і, отже, зміни напружено-деформованого стану об'єкту.

Проведемо дослідження впливу температури матеріалу плити преса на деякі параметри напруженого стану заготовок. Розглянемо циліндричну заготовку нагріту до температури $T_0=1200^\circ\text{C}$. Передбачається, що тертя на поверхні контакту заготовка-інструмент відсутня.

Теплофізичні характеристики матеріалів заготовок мають таке значення: коефіцієнт теплоємності $c=0,245$ ккал/кг \cdot с коефіцієнт теплопровідності $\lambda=0,058$ ккал/см $^\circ\text{C}$, питома вага матеріалу $\gamma=7870$ кг/см 3 . Оскільки процес гарячої осадки циліндричної заготовки моделюється при зовнішніх умовах, максимально наближених до реальних, на деформоване тіло накладаються два процеси теплопередачі: через контактну поверхню інструмент - деформоване тіло (коефіцієнт теплопровідності $\lambda_T=5000$ ккал/м 2 ч $^\circ\text{C}$) і через бічні поверхні заготовки за рахунок випромінювання і конвекції (коефіцієнт теплопровідності $\lambda_T=150$ ккал/м 2 ч $^\circ\text{C}$). Температура середовища $T_{cp.}=20^\circ\text{C}$. Дослідження

впливу температури матеріалу плити преса проводилося при трьох значеннях $T_1=100^\circ\text{C}$, $T_2=300^\circ\text{C}$, $T_3=500^\circ\text{C}$.

На рис. 5 наведені ізолінії розподілення температури в меридіональному перетині заготовки при рівні осадки $H/H_0=0,53$ і температурі преса 100 і 500 градусів. Очевидно, що збільшення температури преса вирівнює розподілення температури по висоті заготовки в приграничній зоні.

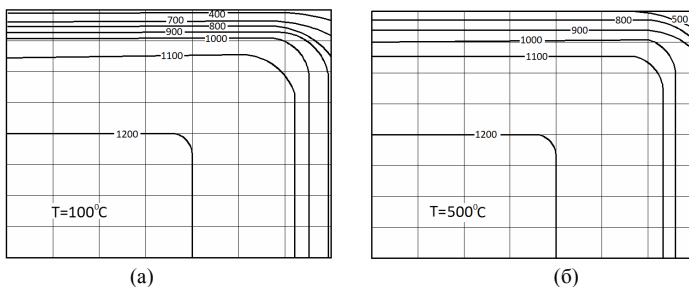


Рис. 5

Виявилося, що на характер зміни зусилля деформування заготовки збільшення температури інструменту практично не впливає. Це пояснюється тим, що охолодженню піддається тільки поверхневий шар, об'єм якого в порівнянні з усім тілом становить 5%.

Стискаючі окружні напруження, що виникають у верхній частині бокової поверхні заготовки при її охолодженні, призводять до збільшення кривизни поперечного перерізу. При цьому форма бічної поверхні наближається до бочкоподібної.

Зміна температури плити преса суттєво впливає на розподіл і рівень окружних напружень $\sigma^{3'3'}$ по перерізу заготовки. Аналіз результатів, представлених на рис. 6 і рис. 7 у вигляді ізолінії $\sigma^{3'3'}$ за поперечним перерізом показав, що зменшення температури преса призводить до зростання напружень $\sigma^{3'3'}$ як в зоні стискаючих напружень, так і в зонах розтягувальних напружень. При цьому виявилося, що на розміри зон розтягуючих напружень зменшення температури по контактній поверхні не має практично ніякого впливу.

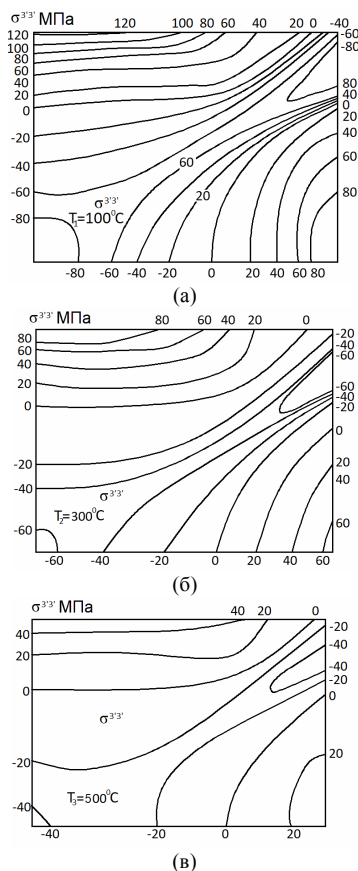


Рис. 6

На рис. 7 представлена еюра колових напружень по боковій поверхні деформування заготовки до $H/H_0=0,53$ при різних температурах плити преса. Стискаючі окружні напруження, що виникають у верхній частині заготовки при її охолодженні, призводять до збільшення конусності поперечного перерізу і, отже, до виникнення і зростання розтягуючих напружень в центральній частині. При цьому форма бічної поверхні наближається до бочкоподібної, також як при терті.

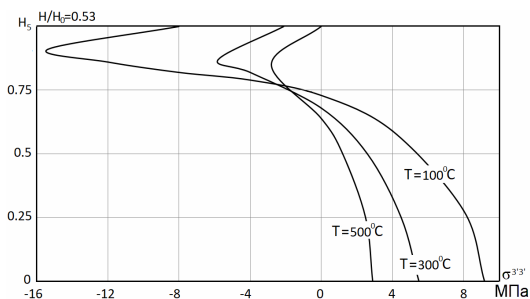


Рис. 7

Таким чином, чисельні дослідження процесу осадки циліндричної заготовки показали, що зміна умов теплообміну між ними призводить до більш нерівномірного характеру розподілу напружень по поперечному перетину заготовки, розширенню зони розтягуючих окружних напружень, зростанню величини останніх, що може позначитися на якості виробів, що виготовляються.

Висновок. Наведені вище результати розрахунків технологічних процесів дають підставу зробити висновок, що розроблена методика і реалізуючий її програмний комплекс, дозволяють проводити дослідження формозмінення оболонкових, масивних вісесиметричних конструкцій з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності при силовому і нестационарному температурному навантаженнях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип.92. – С. 3-16.
2. *Гуляр О.І.* Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк, В.П. Андрієвський, С.В. Мицюк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.95, 2015. С. 11-20.
3. *Гуляр О.І.* Дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Технічні науки та технології : науковий журнал. Чернівці: ЧНТУ, 2(12), 2018. С 9-24.
4. *Каракина А.А.* Определения температурного поля при деформации / А.А. Каракина, В.И. Тарновский, А.В. Иванецкий и др. // Изв. Вузов. Черная металлургия, 1966, № 8, с.122-127.
5. *Максим'юк Ю.В.* Индиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості. / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. - Вип.99. – С. 151-159.
6. *Максим'юк Ю.В.* Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.96, 2015. С. 148-157.
7. *Максим'юк Ю.В.* Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл. / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.97, 2016. С. 186-193.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Osoblivosti vikoristannya momentnoyi shemi skinchenih elementiv (MSSE) pri neliniynih rozrahunkah obolonok i plastin (Peculiarities of using the finite element moment scheme (FEMS) in nonlinear calculations of shells and plates)/ V.A. Bazhenov, O.S. Saharov, O.I. Gulyar, C.O. Piskunov, Yu.V. Maksymyuk // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – 2017. - Vip.92. – S. 3-16.
2. *Gulyar O.I.* Algoritm rozv'yazannya visesimetrichnih zadach nestatsionarnoyi teploprovodnosti (An algorithm for solving the axiomatic problems of non-stationary heat conductivity) / O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, Yu.V. Maksymyuk, V.P. AndriEvskiy, S.V. Mitsyuk // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tehn. zbirnik / Vidp. red. V.A.Bazhenov.* –K.:KNUBA, Vip.95, 2015. C. 11-20.
3. *Gulyar O.I.* Doslidzhennya neliniynogo deformuvannya skladenih obolonok obertannya serednoyi tovschini (Investigation of nonlinear deformation of composite shells of rotation of middle thickness) / O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, Yu.V. Maksymyuk // *Tekhnichni nauki ta tehnologiyi : naukoviy zhurnal. Chernigiv: ChNTU, 2(12), 2018. S 9-24.*
4. *Karakina A.A.* Opredeleniya temperaturnogo polya pri deformatsii (Determination of the temperature field during deformation) / A.A. Karakina, V.I. Tarnovskiy, A.V. Ivanitskiy i dr. // *Izv. Vuzov. Chernaya metallurgiya, 1966, # 8, s.122-127.*
5. *Maksymyuk Yu.V.* Indiferentnist tenzoriv deformatsiy, napruzhen ta yih priroschen pri umovi energetichnoyi spoluchenosti. (The indifference of tensors of deformations, stresses and their increments under the condition of energy interconnection) / Yu.V. Maksymyuk // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – 2017. - Vip.99. – S. 151-159.
6. *Maksymyuk Yu.V.* Skincheniy element zagalnogo tipu dlya rozv'yazku visesimetrichnoyi zadachi nestatsionarnoyi teploprovodnosti (A finite element of general type for the solution of an axisymmetric problem of non-stationary heat conductivity) / Yu.V. Maksymyuk // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tehn. zbirnik / Vidp. red. V.A.Bazhenov.* –K.:KNUBA, Vip.96, 2015. C. 148-157.
7. *Maksymyuk Yu.V.* Postanovka zadachi pro vplyv heometrychnoi neliniynosti na nesuchu zdattist i zakrytychnu povedinku tonkostinnykh ta kombinovanykh visesymetrynykh til. (Statement of the problem of the influence of geometric nonlinearity on the bearing capacity and the supercritical behavior of thin-walled and combined axisymmetric bodies) / Yu.V. Maksymyuk // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirnyk / Vidp. red. V.A.Bazhenov.* –K.:KNUBA, Vyp.97, 2016. C. 186-193.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2018 р.

Bazhenov V.A., Maksymyuk Yu.V.

STRESS-STRAIN STATE AND FORM-CHANGING OF MASSIVE AND SIMPLE OBJECTS

The paper presents the results of the mathematical modeling of the processes of the transformation of massive and thin-walled bodies of rotation under the action of forced displacements and unstopable temperature fields with large irreversible deformations and variable boundary conditions. As examples, operations of extracting cylindrical glass and hot precipitations of cylindrical work are considered.

The processes of processing of metals by stamping are marked by a significant change in the workpieces under the action of poisons, stamps and other tools, often in conditions of uneven heating. In addition, the conditions of interaction with contacting bodies determine the significant influence on the course of change in their stress-strain state. Further improvement of various technological processes of metal processing by embossing to a large extent depends on the completeness and reliability of information on the peculiarities of changing the picture of the VAT of the workpieces in the process of deformation. In this connection, the urgency of the development of research methods for plastic molding, taking into account geometric nonlinearity with large physical-nonlinear deformations, contact interaction and heat transfer conditions on the boundary surfaces, is increasing.

In this paper, as output, settlement relationships, and algorithms for solving nonlinear equations systems are taken in the publications of the authors [1, 5, 7].

The results of the calculations of technological processes presented in this paper give the basis to conclude that the developed method and implementing its software complex, allow to conduct studies on the modification of shell, massive axisymmetric constructions, taking into account geometric and physical nonlinearity in power and non-stationary temperature loads.

Keywords: stress-deformed state, form-modification, axial-symmetric bodies, massive and thin-walled objects, unverified temperature field, universal FE, moment diagram of finite elements (FEMS), extractor of cylindrical glass, hot draft of cylindrical workpiece.

Баженов В.А., Максимюк Ю.В

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МАССИВНЫХ И ТОНКОСТЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

В работе приведены результаты математичного моделирования процессов формоизменения массивных и тонкостенных тел вращения под действием вынужденных перемещений и неусталенных температурных полей при больших необратимых деформациях и переменных граничных условиях. В качестве примеров рассмотрены операции вытяжки цилиндрического стакана и горячей осадки цилиндрической заготовки.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, формоизменения, осесимметричные тела, массивные и тонкостенные объекты, неусталенное температурное поле, универсальный СЕ, моментная схема конечных элементов (МССЕ), вытяжка цилиндрического стакана, горячая осадка цилиндрической заготовки.

УДК 539.3

Баженов В.А., Максим'юк Ю.В. **Напружено-деформований стан і формозмінення масивних і тонкостінних об'єктів** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 3-12.

В роботі наведено результати математичного моделювання процесів формозмінення масивних і тонкостінних тіл обертання під дією вимушених переміщень та неусталених температурних полів при великих незворотних деформаціях і перемінних граничних умовах. В якості прикладів розглянуті операції витяжки циліндричного стакану і гарячої осадки циліндричної заготовки.

Табл. 1. Іл. 6. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3

Bazhenov V.A., Maximyuk Yu.V. **Stress-strain state and form-changing of massive and thin-walled objects** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 3-12.

The paper presents the results of the mathematical modeling of the processes of the transformation of massive and thin-walled bodies of rotation under the action of forced displacements and unstoppable temperature fields with large irreversible deformations and variable boundary conditions. As examples, operations of extracting cylindrical glass and hot precipitations of cylindrical work are considered.

Tabl. 1. Fig. 6. Ref. 7.

Баженов В.А., Максимюк Ю.В. **Напряженно-деформированное состояние и формозменения массивных и тонкостенных объектов.** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вип. 102. - С. 3-12.

В работе приведены результаты математичного моделирования процессов формоизменения массивных и тонкостенных тел вращения под действием вынужденных перемещений и неусталенных температурных полей при больших необратимых деформациях и переменных граничных условиях. В качестве примеров рассмотрены операции вытяжки цилиндрического стакана и горячей осадки цилиндрической заготовки.

Табл. 1. Ил. 6. Библиогр. 7 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, завідувач кафедри будівельної механіки **БАЖЕНОВ Віктор Андрійович**

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29;

E-mail: vikabazh@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки **МАКСИМ'ЮК Юрій Всеволодович**

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **МАКСИМ'ЮКУ Юрію Всеволодовичу**

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38;

Мобільний тел.: +38(067) 230-94-72;

E-mail: maximvuk@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

UDC 539.3

AN ANALYSIS OF RAFT THICKNESS IN HIGH-RISE BUILDINGS - CASE STUDIES

Cao Van Hoa¹, PhD

Lecturer, Faculty of Civil Engineering

Nguyen Anh Tuan², PhD

Lecturer, Faculty of Transportation Engineering

¹Hochiminh City University of Architecture, Vietnam

²Hochiminh City University of Transport, Vietnam

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.13-24

Abstract. This study shows that the raft thickness is depended on foundation system, Young modulus of soil right under the raft and number of floors of superstructure, and explains very well the case of thick raft of ICC Tower, thin raft of Dubai Tower and reasonable raft thickness of Incheon Tower.

Keywords: Piled raft, Raft, Pile group, Soil-structure interaction, Case study, Settlement.

1. Introduction

While designing of the superstructure, in practice the structural engineers neglect the behaviour of foundation system, they assume that the raft should be absolute rigid. On the other hand, the geotechnical engineers in designing of the foundation system, only take internal forces from the superstructure design to analyse the foundation, they may not care about the behaviour of superstructure after its designing. Meanwhile, one of targets of foundation design is displacement, especially differential displacement - the one of fixed conditions of superstructure to the foundation. The differential displacement (also called deformation of raft) is the reason in redistribution of internal forces of the superstructure, this had changed the condition of the fixity of the structural engineers. The changed internal forces in superstructure at column feet had also changed the displacement as calculated by geotechnical engineer. Therefore, it is necessary to control the raft deformation in order to maintain the fixed conditions. Niandou & Breyse [1] recognized that designing of superstructure, the raft should be infinitely rigid in comparison with the superstructure, on the other hand the raft is more or less flexible as compared with the subsoil, the model in this case is when h^3/k_0 (h - raft thickness, k - pile stiffness). For the design of piles, the geotechnical engineer assumes that the load from superstructure is evenly distribute for all piles, in this case h^3/k_{xx} . One can recognize that the two cases as mentioned above are of course not compatible, in designing of superstructure and foundation system.

GB 50007 - 2002 stated that the raft thickness is designed based on the criteria of the bending and punching capacity, and usually depended on superstructure. Tomlinson [3] proposed that the raft thickness should be designed as rigid slab under point forces from piles. Poulos [3] give four criteria for the raft design, there are: maximum moment, maximum shear force, maximum

contact pressure and local displacement under the raft. Fig. 2 illustrates the relationship between the raft thickness and number of floors of 31 statistic buildings constructed in Vietnam and over the World. It can be recognized that the thicknesses of rafts are very large, it varies from 1.5 to 8 m. With the thickness, the bending and punching of the raft is very large, but the construction cost is also large. Therefore the question is, how the raft thickness should be designed rationally, so it can satisfy the fixed condition of the superstructure and the flexible condition in designing of the raft.

There are a lot of researches for the effect of pile group on the raft thickness, for example: Tan et al (1996), Maybaum et al (200), Poulos (2001), Chow et al (2001), Oh et al (2006), Rabiei (2009), Vasudev & Unikrisnan (2009), Ziaie – Moayed et al. (2010); Or the effect of subsoil on the raft thickness as: Thangaraj & Ilamparuthi (2009), Oh et al. (2006), Nandou & Breysser (2005); Or the effects of superstructure on the raft thickness, as: Meyerhof (1947), Sommer (1957), Grasshof et al. (1957), and Thangaraj & Ilamparuthi (2009). From the researches, one can recognize that the raft thickness is depended on three groups of factors: superstructure (number of floors, stiffness, distance between columns, etc), pile group (length, diameter, amount, configuration and so on), subsoil (Young modulus at the tip and top of piles).

2. Analysis of the effects on raft thickness

This study used computer code PRABS (Piled Raft Analysis with Batter piles), wrote by Kityodom P. & Matsumoto T [4] to analyse a model of high-rise building, in comparison with the statistical data from 26 buildings constructed in Vietnam and over the World. The detail was described in Chau Ngoc An & Cao Van Hoa [5].

2.1 The effect of foundation structure

Settlement of subsoil, displacement of foundation system are related with the displacement and deformation of the raft, they have the same value at the bottom surface of the raft. It is recognized that there are average displacement and differential displacement. But the differential displacement is related with the deformation and the bending moment of the raft. In analysing of raft, the differential displacement is the main target.

The analysis of the effect of the foundation system, the superstructure of the model is keeping unchanged while the pile configuration and the raft thickness is putting changed, similar to [6].

Fig. 1(a) shows the relationship between the differential displacement with the raft thickness, what is increasing from 2 m to 8 m, in cases of various pile configurations (Scheme 1 to Scheme 4) and various pile diameter. It can be recognized that with increasing of the raft thickness, the differential displacement at all scheme of pile configuration and pile diameter tend to decrease to zero value. The raft thickness at all pile configuration schemes can reduce the differential displacement strongly, it can be compensated for error pile schemes, pile defect and other error. As the more rational pile configuration scheme, the more homogenous subsoil, then the raft thickness do not effect significantly on the differential displacement [1]. Fig. 1(b) shows that the raft thickness do not affect on the average displacement.

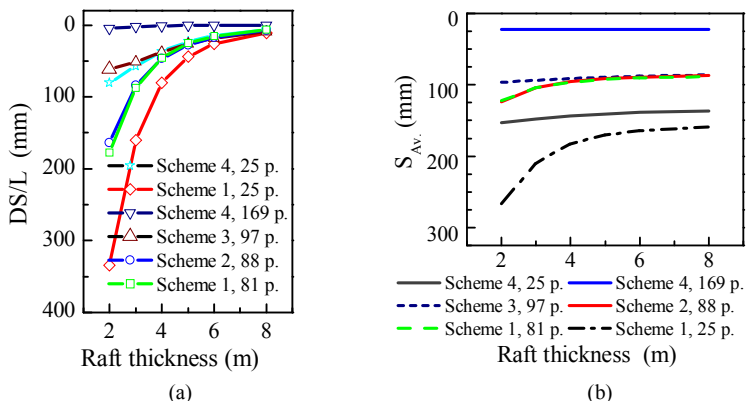


Fig. 1. Effect of raft thickness on displacement

In short, the larger thickness of raft can reduce the differential displacement whenever the rational pile configuration scheme is impossible.

2.2 The effect of superstructure

The effect of number of floors (load) on displacement is mentioned by many authors such as: Tran & Diep (1990), Tomlinson (1994), Diep T.T. (1995) [7]. In order to verify the effect, PRAB is used to calculate the displacement at raft's level of the above models, being equivalent to building of 30, 40, 50 and 200 floors. In this analysis, our concern is about the differential displacement, is not average displacement, therefore there is no need to re-design any pile group and raft, meaning that we keep the pile group stiffness against average displacement of the foundation.

The curve in Fig. 2 shows the relationship of raft thickness and number of floors of statistics buildings. It clearly shows that the superstructure affects greatly on the number of floors of a building.

Fig. 3(a) shows that the higher a building, the greater displacement. If we cannot choose a suitable pile's configuration, it is necessary to design a thick raft in order to meet the allowable displacement. The result in

Fig. 3(b) shows the relationship of number of floors and raft thickness with allowable displacements of 0.2% and 0.05% accordingly. Curves in both Fig. 2 and Fig. 3(b) are relatively the same, show that the raft thickness increases when number of floors increase.

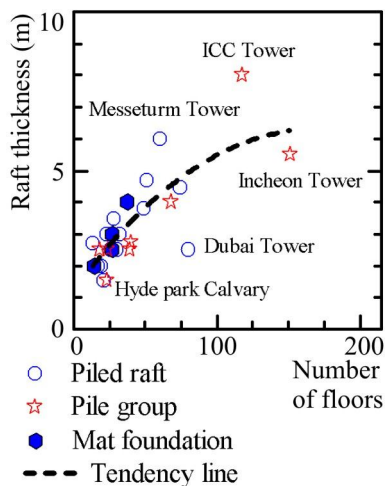


Fig. 2. Relationship between raft thickness and number of floors from 26 statistic buildings

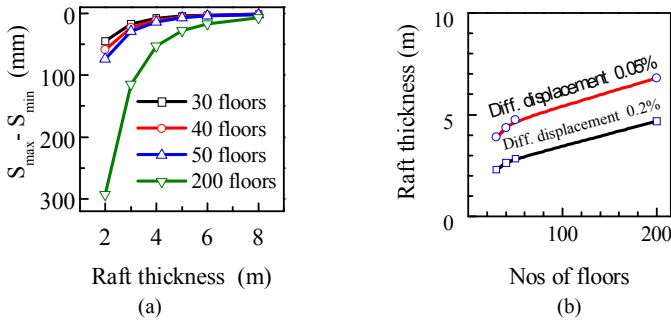


Fig. 3. Relationship between raft thickness and number of floors

In short, the raft thickness is depended on number of floors, as with conclusions of Tran & Diep (1990), Diep T.T. (1995), Tomlinson (1994). When number of floors increase from 30 to 200, the raft thickness increases around 2.5 times.

2.3 The effect of Young modulus of soil

During the calculation of pile internal forces and soil pressure around piles by PRAB, it can be recognized the exist of a neutral plane somewhere between top and tip of piles, see Fig. 4. This conclusion is matching well with Fellenius research [8].

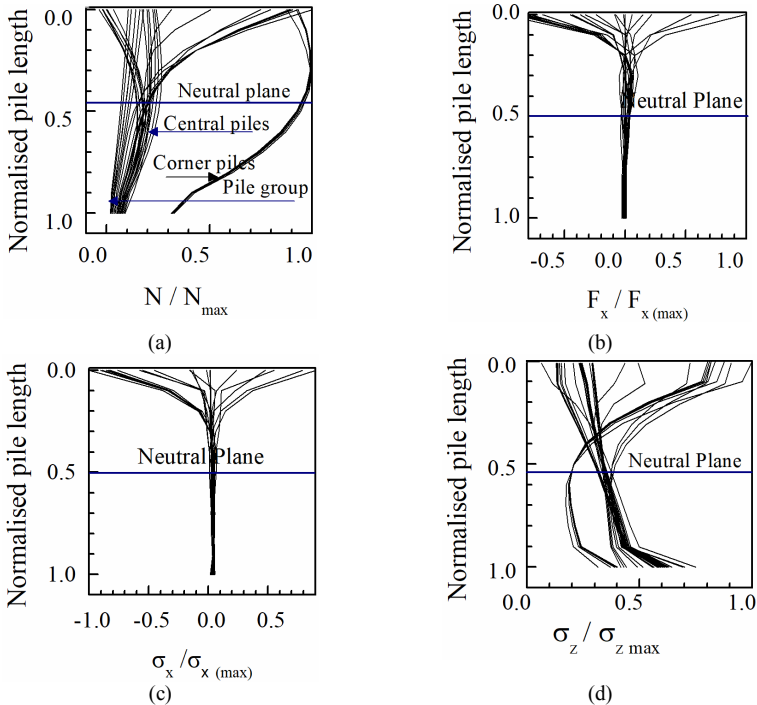


Fig. 4. Relationship between internal forces in piles and stress in soil with depth

Fig. 4 shows that there is a neutral plane stay parallel to raft foundation at approximately the middle of pile length. The differentiated value between force in piles and stress in the subsoil on x and z direction above this plane is relatively large, but the differentiated value below is rather trivial. This means the piles and soil on the neutral plane bearing the great force.

Therefore, it is really necessary to research the effect of soil in this area (between raft and neutral plane), displacement and role of raft. Young modulus of soil underneath the raft foundation in the research is around 30 MPa, which is rather common in the area of district 1, HCM city. However, when the soil is improved, or in other construction area, Young modulus of soil has the greater value, ranging from 50 to 100 MPa (equivalent to the clay soil in Frankfurt). In some buildings in the world, such as Dubai Tower, the soil underneath the raft is limestone, with Young modulus of 1,500 MPa. In order to evaluate generally and understanding the raft thickness of 31 statistic buildings in the world, the Young modulus in this research is ranging from 30 to 175 MPa.

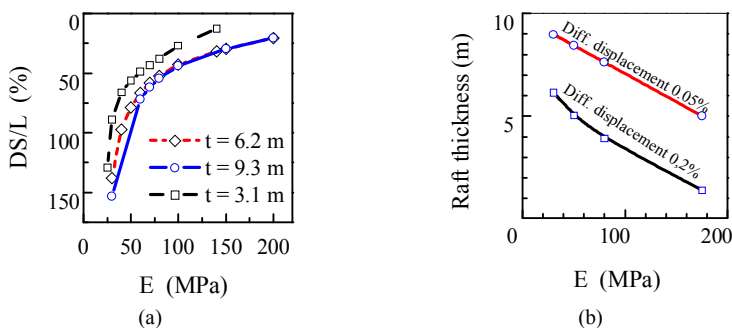


Fig. 5. Effect of Young modulus on raft thickness and displacement

Fig. 5(a) shows that in case of the soil layer is thick 3.1 m (around 10% of the raft width) under the raft has the large Young modulus, the displacement is sharply reduced; in comparison with the thicker soil layer (around 6.2 m and 9.3 m). Fig. 5(b) shows the effect of soil's Young modulus on the raft thickness: if the modulus increases from 30 to 175 MPa, raft thickness can be reduced from 2 to 3 times, depending on the displacement tolerance.

In conclusion, Fig. 5 shows that if Young modulus of soil layer under the raft has thickness of 10 – 20% of the raft width, it can greatly reduce displacement.

3. Discussion and Cases study

3.1 Dubai Tower

The Dubai Tower is 400 m high, include 74 floors plus 3 basement floors, see Fig. 6. It is founded on very thin raft supported by 163 piles with 22 m and 29 piles 32 m long below the main foundation area. Under the raft there is 15 m limestone with long term Young modulus of 1,500 Mpa. The Dubai Tower is designed as piled raft foundation, meaning that piles are placed in the foundation mainly to reduce the displacement. [9].

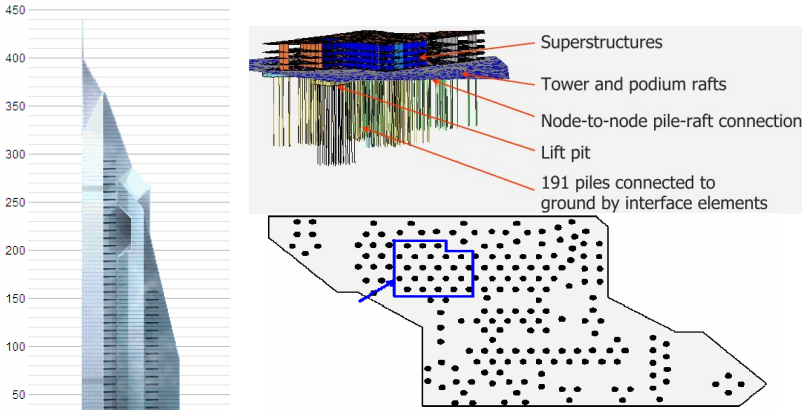


Fig. 6. The Dubai Tower

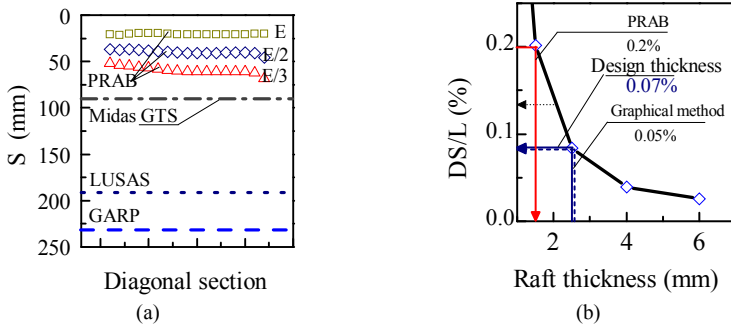


Fig. 7. Comparison of the displacement by various methods, and optimizing raft thickness by PRAB

The original designed raft thickness is 2.5 m, the differential displacement (raft deformation) of 0.07% calculated by Poulos [9] using GARP. The computed thickness by PRAB is 1.5 m at deformation of 0.2%. Fig. 5(a) shows that the displacement of the Dubai Tower foundation is calculated by various methods by many researchers [9], [10] are matched well with PRABS results. Therefore, using PRABS one can optimize the thickness of the Dubai Tower's raft to meet the allowable different displacement of 0.2% is about 1.6 m. Using graph developed based on 3 factors: Young modulus of soil, number of floors and piles length, as described in [5], we get the raft thickness of 2.1 m. It shows that even with using different methods to attain results with similar value.

We can see that the raft thickness in Dubai Tower is thin because the Young modulus of soil under the raft is great.

3.2 ICC Tower, Hong Kong

The ICC Tower (HongKong) is 484 m high (with 118 floors + 6 basements), was built in the West of Kowloon Island, on Victoria Coast, Hong Kong. Fig. 6 shows the layout of upper structure and raft foundation of the ICC Tower.

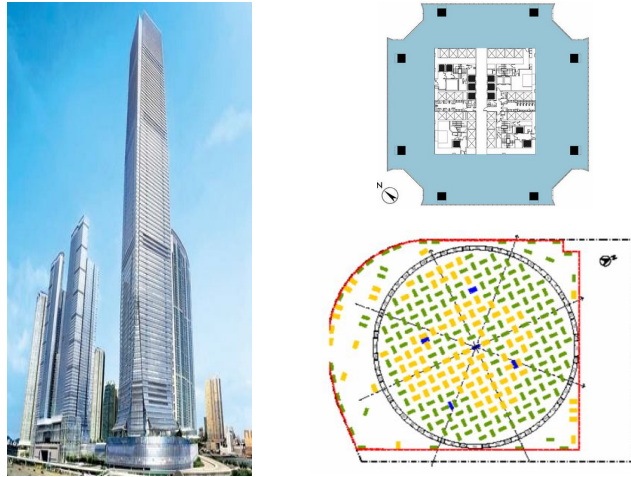


Fig. 8. Layout of upper structure and foundation structure of ICC Tower, Hong Kong [11]

The Tower is designed by the pile group foundation. The raft thickness is 8 m, the raft is placed at level of - 26 m. The pile system includes 86 barrette piles of 1.5x2.8 m, and 154 barrette piles of 1.0x2.8 m. Since the rock-head level varies between EL-61 m and EL-106 m, the soil has different bearing capacity, then the pile toe is proposed to place 2 m away from the base rock in order to limit the different displacement. The result is that the pile length is ranging from 35 to 70 m (the largest pile toe elevation is EL-95 m). The barrette wall surrounding the perimeter of foundation with dia. 76 m, 1.5 m thick, and is constructed at the elevation of EL-95 m.

The soil under the raft consists of alluvium and CDG overlying rock, including medium to coarse gravel, clay to coarse sand, sandstone with modulus under 30 MPa [9].

The designed raft thickness is 8 m at the differential displacement (raft deformation) of 0.048%. Fig. 9(a) shows that the displacement calculated by Plaxis [PdLong] and the result from PRAB are matched well. Then using PRABS to optimize the raft thickness of ICC Tower at Fig. 9(b), one can recognize that the thickness is about 1.5 m at deformation of 0.2%. Raft thickness based on the graph method [5] is 7.1 m at deformation of 0.2%. It shows that the raft thickness attained by using 3 methods above give vastly different value.

In short, the raft thickness of ICC Tower seem to be too large. For this case, this is the case of the pile group foundation, the average displacement should be very small, then the differential displacement is also small. The ICC Tower do not need the thick raft to balance the raft deformation.

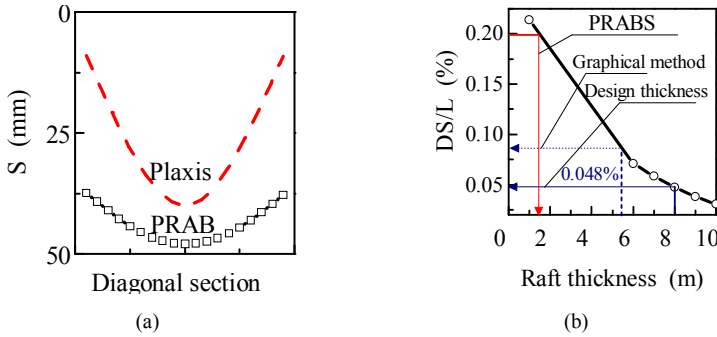


Fig. 9. Comparison of the displacement by various methods, and optimizing raft thickness by PRAB

3.3 Incheon Tower Poulos 2011,8, Republic of Korea

The foundation of the Tower is pile group type, include a raft thickness 5,5 m as an intermediate structure with piles under and core of superstructure above. Number of piles, pile configuration and sizes are determined after a numerous repeated analysis, with cooperation between the structural and geotechnical engineers. Pile length and pile diameter are selected based on behaviour and bearing capacity. The target of pile length selection is to control the displacement of tower. From the above analysis, pile tips are proposed to locate in the soft rock layer, instead of lightly weathered rock above. There are two rules for determination of pile length: pile tip should be minimum 2 m in the soft rock and pile tip should be at elevation of EL -50,0 m.

The final pile configuration was proposed to be 172 piles with dia. 2.5m, with length (from raft level) ranging from 36 to 66m. The raft bottom is at EL -14.6 m.

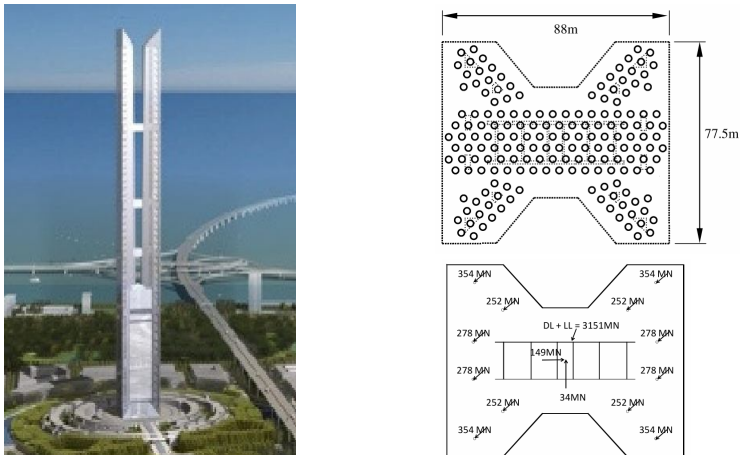


Fig. 10. Layout of upper structure of Incheon Tower

Soil in this area is mainly a mixture of sand and mud, near sea coast, and constantly flooded by tide. Geological section included: The surface is lost sand and sandy silt with 8 m thick; the second layer is upper marine deposits (UMD), with soft to firm marine silty clay, with 20 m thick; the third layer is lower marine deposits (LMD), with medium dense to dense silty sand, with 2 m thick; the fourth layer is highly weathered rock, with low pressure bearing capacity, under it is a layer of lightly weathered rock with greater pressure bearing capacity; the fifth layer is base rock, with two minor layers: softer stone located on EL-50m, and harder stone located under EL -50m.[11], [12].

The designed raft thickness is 5.5 m at the differential displacement (raft deformation) of 0.204%. Fig. 11(a) shows that the displacement calculated by Plaxis and GARP [11] and the result from PRAB are matched well. One can recognize that the results from Plaxis with consideration or without consideration of friction of basement wall can be neglected. That mean that computer program like PRABS, GARP can be used for evaluation of the pile raft foundation. Then using PRABS to optimize the raft thickness of Incheon Tower at Fig. 11(b), one can recognize that the thickness is about 5.8 m at deformation of 0.2%. The raft thickness from graph (Fig. 9) is 7.75 m at deformation of 0.2%. The raft thicknesses calculated by the three methods are matched well.

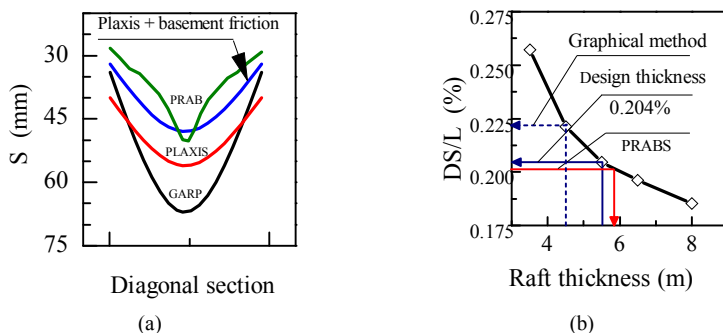


Fig. 11. Comparison of the displacement by various methods, optimizing raft thickness by PRABS

In short, the raft thickness of the Incheon Tower is designed reasonably. This is a good practice that the structural engineers and geotechnical cooperate in optimizing the raft thickness before designing rebar and concrete.

4. Conclusion

It proves that there is no agreed method for designers to use when choosing raft thickness at the moment, as well as the need for choosing reasonable raft thickness has not been put into the thought.

The research records 3 important elements that need to be focus on when analyzing a reasonable raft thickness. They are: number of floors, Youngmodulus of soil, and pile configuration (especially pile length). The actual raft thicknesses in all statistic building are larger than optimizing results from PRABS show that, it is necessary to choose the larger raft thickness than the

reasonable one, in cases of damaged pile, uneven ground throughout the pile's body, soil under the pile's head.

Raft thickness of The Dubai Tower and the Incheon Tower are reasonable, raft thickness of the ICC Tower seem to be larger than required.

Acknowledgment

In this paper, the author used PRAB program, a present to Construction Department of HCM city Architecture University by Prof. Matsumoto T. The author of this paper sincerely is thankful for valuable advises from lecturers in the Geotech department, Construction faculty, HCMUT.

REFERENCES

1. *Niandou H. and Breyse D.*, "Consequences of soil variability and soil-structure interaction on the reliability of a piled raft," ICOSAR 2005, Millpress, Rotterdam, ISBN 90 5966 040 4, 2005, pp. 917–924.
2. *Tomlinson M.J.*, Pile design and construction practice, E & FN SPON, an imprint of Chapman & Hall, London, 1994.
3. *Poulos H.G.*, "METHODS OF ANALYSIS OF PILED RAFT FOUNDATIONS," A Report Prepared on Behalf of Technical Committee TC18 on Piled Foundations, July, 2001.
4. *Kitiyodom P. and Matsumoto T.*, A simplified analysis method for piled raft foundations in non-homogeneous soils, in Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomechanics, 2002, 2003.
5. *Chau N. A., Cao Van Hoa.*, "Establishing Graphical Method for Calculation of Raft Thickness in Piled Raft, Pile Group, and Raft Foundation" EASEC-14, Ho Chi Minh City, Vietnam, ISBN 978-604-82-1684-9, January 6-8, 2016, pp 468 - 469.
6. *Rabiei M.*, "Parametric Study for Piled Raft Foundations," EDGE vol. 1, Bund. A, no. 1980, pp. 1–11, 2009.
7. *Nguyen, B. K. et al.*, Móng nhà cao tầng, kinh nghiệm nước ngoài, Nhà xuất bản xây dựng, Hanoi, 2008.
8. *Fellenius B. H.*, "UNIFIED DESIGN OF PILED FOUNDATIONS WITH EMPHASIS ON SETTLEMENT ANALYSIS," Geo-Institute Geo-TRANS Conference, Los Angeles, July 27-30, 2004.
9. *Long P.D.*, "Piled Raft - A New Foundation Design Philosophy for High-Rises," Geotech Hanoi 2011-ISBN 978-604-82-000-8, 2011.
10. *Murrells C. and Gastebled O.*, Dubai Tower Piled Raft Foundation, Advanced in 3D Geotechnical analysis, I. Struct. E., London, 2007.
11. *Poulos H. G.*, The Design of High-Rise Building Foundations, Geotech Hanoi, -ISBN 978-604-82-000-8, October 2011.
12. *Zhenxiang Yu.*, "Behavior of a Piled Cap Foundation under a Vertical Loading," Master thesis, The University of Hong Kong, 2011.

Стаття надійшла 02.05.2018

Cao Van Hoa, Nguyen Anh Tuan

AN ANALYSIS OF RAFT THICKNESS IN HIGH-RISE BUILDINGS - CASE STUDIES

From the observation of rafts of 31 high-rise buildings constructed in Vietnam and over the world, it can be recognized that they have very large thickness. So, the questions are, what is the role of the raft (it's thickness) in a especially foundation system, and in the whole upper-structure – raft – soil and pile group's interaction in general? And why does the raft thickness in some building seem to be very large (e.g. ICC Tower is 484 m tall, has raft of 8.0 m thick), while the others have relatively thinner raft (e.g. Dubai Tower is 400 m tall, has raft of 2.5 m thick).

This study shows that the raft thickness is depended on the foundation system, Young modulus of soil right under the raft and number of floors of superstructure. This analysis explains very well the case of thick raft of ICC Tower, thin raft of Dubai Tower and reasonable raft thickness of Incheon Tower.

Keywords: Piled raft, Raft, Pile group, Soil-structure interaction, Case study, Settlement.

Као Ван Хоа, Нгуен Анх Туан

АНАЛІЗ ТОВЩИНИ ФУНДАМЕНТНИХ ПЛИТ ВИСОТНИХ БУДІВЕЛЬ - ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

По вивченню товщини фундаментних плит 31 висотного будинку, побудованого у В'єтнамі і в усьому світі, можна визнати, що вони мають дуже велику товщину. Отже, питання полягає в тому, яка роль фундаментної плити (її товщини) в системі фундаменту, і в цілому у взаємодії верхньої конструкції плити-грунту і свайне групи? І чому товщина плити в деяких будівлях виявляється дуже великий (наприклад, вежа ІСС висотою 484 м, має фундаментну плиту товщиною 8,0 м), в той час як інші мають відносно більш тонкі фундаментні плити (наприклад, товщина фундаментної плити Дубайської Вежа висотою 400 м становить 2,5 м).

Це дослідження показує, що товщина плити залежить від конструкції фундаменту, модуля пружності ґрунту, що знаходиться безпосередньо під плитою і кількості поверхів будівлі. Цей аналіз дуже добре пояснює випадок потовщеною плити вежі ІСС, більш тонкої плити Дубайської вежі і оптимальної товщини плити в башті Інчхон.

Ключові слова: Пальовий фундамент, пальове поле, взаємодія ґрунт-структура, приклади дослідження, поселення.

Као Ван Хоа, Нгуен Анх Туан

АНАЛІЗ ТОЛЩИНИ ФУНДАМЕНТНИХ ПЛИТ ВИСОТНИХ ЗДАНИЙ - ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В результате изучения фундаментных плит 31 высотного здания, построенных во Вьетнаме и во всем мире, можно признать, что они имеют очень большую толщину. Итак, вопрос заключается в том, какова роль фундаментной плиты (её толщины) в системе фундамента, и в целом во взаимодействии верхней конструкции плиты-грунта и свайной группы? И почему толщина плиты в некоторых зданиях оказывается очень большой (например, башня ІСС высотой 484 м, имеет фундаментную плиту толщиной 8,0 м), в то время как другие имеют относительно более тонкие фундаментные плиты (например, толщина фундаментной плиты Дубайской Башня высотой 400 м составляет 2,5 м)?

Это исследование показывает, что толщина плиты зависит от конструкции фундамента, модуля упругости ґрунта, находящегося непосредственно под плитой и количества этажей здания. Этот анализ хорошо объясняет случай утолщенной плиты башни ІСС, более тонкой плиты Дубайской башни и оптимальность толщины плиты башни Інчхон.

Ключевые слова: Свайный фундамент, плот, Свайное поле, взаимодействие ґрунт-структура, примеры исследования, поселение.

УДК 539.3

Као Ван Хоа, Нгуен Анх Туан. Аналіз товщини фундаментних плит висотних будівель - приклади дослідження / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2019. - Вып. 102. - С. 13-24. - Англ.

Досліджено залежність товщини фундаментних плит багатопверхових споруд від конструкції фундаменту, модуля пружності ґрунту, що знаходиться безпосередньо під плитою і кількості поверхів будівлі.

Табл. 0. Іл. 11. Бібліогр. 12 назв.

UDC 539.3

Cao Van Hoa, Nguyen Anh Tuan. An analysis of raft thickness in high-rise buildings - case studies / Strength of materials and theory of structures: Sci.&Tech. Collected Artcl. - K.: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 13-24.

The dependence of the thickness of the raft foundation of multistoried buildings on the structure of the foundation, the modulus of elasticity of the soil, located directly under the stove and the number of floors of superstructure, is investigated.

Tabl. 0. Fig. 11. Ref. 12.

УДК 539.3

Као Ван Хоа, Нгуен Анх Туан. Аналіз товщини фундаментних плит висотних зданий - примеры исследования // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. - С. 13-24. - Англ.

Исследована зависимость толщины фундаментных плит многоэтажных сооружений от конструкции фундамента, модуля упругости ґрунта, находящегося непосредственно под плитой и этажности здания.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. 25 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

Cao Van Hoa, PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Hochiminh City University of Architecture.

Adr.: No. 196, Pasteur St., Ward 6, Dist. 3, Hochiminh City, Vietnam.

Phone: (+84) 908.348.763.

Email: caohoa9449@gmail.com

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

Nguyen Anh Tuan, PhD, Lecturer, Faculty of Transportation Engineering, Hochiminh City University of Transport.

Adr.: No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam.

Phone: (+84) 917.863.898.

Email: tuankct@hcmutrans.edu.vn

УДК 691.32

ЗМІНА ПОВІТРОПРОНИКНОСТІ ВАЖКОГО БЕТОНУ У ЧАСІ**Г.Г. Фаренюк,**

д-р техн. наук,

Ю.І. Немчинов,

д-р техн. наук, проф.,

А.М. Бамбура,

д-р техн. наук, проф.,

Л.О. Шейніч,

д-р техн. наук, проф.,

М.Г. Миколаєць,

канд. техн. наук,

М.С. Мудрик

*Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій»,
м. Київ*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.25-36

Визначена зміна повітропроникності важкого бетону у часі. Показана актуальність цього показника для забезпечення безпечної експлуатації атомних електростанцій. Проведені порівняльні визначення повітропроникності бетонів однакового складу у віці 28 діб і бетонів у віці більш 35 років, що були відібрані із захисної оболонки атомної електростанції. Встановлено, що повітропроникність бетону змінюється з часом у напрямку її зменшення. Повітропроникність бетонів у віці 28 діб не відповідає вимогам безпечної експлуатації атомних електростанцій. В той же час бетони з захисної оболонки забезпечують вимоги з безпеки експлуатації станцій. Отримані результати пояснюються процесами ущільнення структури бетону у часі при складному напруженому стані, викликаному обтисненням попередньо напруженими канатами на бетон.

Ключові слова: атомна електростанція, бетон

Вступ. Повітропроникність – це здатність матеріалів та конструкцій пропускати повітря під впливом перепаду тиску повітря, тобто різниці тисків на протилежних поверхнях конструкції (матеріалу) [1,2].

Отже повітропроникність або фільтрація повітря крізь матеріал відбувається під впливом різниці загальних тисків на протилежних його поверхнях. Описується за допомогою закону Дарсі, математичний вираз якого формально схожий на закон Фур'є. Але замість коефіцієнта теплопровідності використовується коефіцієнт повітропроникності конструкції, а замість градієнта температур – градієнт тиску. Повітропроникність залежить від кількості і виду пор в матеріалі (замкнуті або відкриті): чим більше відкритих пор, тим більша повітропроникність матеріалу [2,3].

На сьогодні визначення повітропроникності, в основному, проводиться для оздоблювальних та теплоізоляційних матеріалів та майже не виконується для важких бетонів [2]. В той же час повітропроникність важкого бетону є важливим показником і його значення нормується при застосуванні бетонів в захисних оболонках атомних електростанцій [4].

Критичне значення показника повітропроникності бетону визначено з умови допустимої швидкості витoku повітря крізь оболонку при проектній аварії. На сьогодні це значення досягається, в основному, за рахунок конструктивних рішень конструкції захисної оболонки.

Дана робота є частиною науково-дослідних робіт зі встановлення можливості запроєктованої експлуатації АЕС, що виконуються в Державному підприємстві «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій». Її актуальність пов'язана із дослідженням відповідності бетону встановленим вимогам щодо його повітропроникності для комплексного обґрунтування продовження подальшої безпечної експлуатації атомних електростанцій ще на 25 років після досягнення проектного терміну експлуатації (30 років).

1. Аналіз літературних даних та постановка проблеми. Існує декілька методик визначення повітропроникності.

Одна із методик визначення повітропроникності, що застосовується при випробуваннях теплоізоляційних матеріалів, базується на визначенні кількості повітря в м^3 , яке проходить через 1 м^2 конструкції стіни протягом однієї години, при різниці тисків повітря 50 Па. Принцип дії випробувальної установки базується на вимірюванні герметичності змодельованої кімнати, де за допомогою вентилятора в приміщенні створюється розрідження 50 Па, яке імітує дію вітру на будівлю.

У цьому випадку максимальні допустимі значення повітропроникності становлять: в житлових приміщеннях - $3 \text{ м}^3/\text{м}^2\cdot\text{год}$, в інших приміщеннях - $6 \text{ м}^3/\text{м}^2\cdot\text{год}$ [5].

Також повітропроникність теплоізоляційних матеріалів визначають за методом, який полягає в тому, що через конструкцію пропускають потік повітря і, після встановлення стаціонарного потоку, вимірюють витрати повітря та перепад тиску між протилежними поверхнями конструкції. За допомогою компресора створюють стаціонарну різницю тиску по обидві сторони зразка від 10 Па до 250 Па ступенями по 10 Па. Кінцеве значення різниці тисків повинно відповідати розрахунковому значенню для об'єкта випробувань. Число ступенів тиску повинно бути не менше 5.

За результатами вимірювань обчислюють характеристики повітропроникності конструкції або опір повітропроникності.

Існує також достатньо робіт по дослідженню повітропроникності бетону [6, 7, 8, 9]. Проведеними дослідженнями показано, що повітропроникність бетону залежить від його складу та технології його ущільнення [4].

Для визначення повітропроникності важких бетонів, що застосовуються в захисних оболонках атомних електростанцій, в Державному підприємстві «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» в 80-х-90-х роках ХХ ст. була розроблена відповідна методика [4]. В результаті проведених досліджень було встановлено, що бетони звичайних складів не відповідають вимогам по повітропроникності. Тому були розроблені спеціальні бетони, повітропроникність яких відповідає встановленим вимогам.

2. Мета та задачі досліджень. Метою даної роботи є дослідження зміни повітропроникності бетонів у часі.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні задачі:

- підібрати модельний склад бетону, який відповідав би реальному бетону захисних оболонок АЕС;

- провести порівняльні дослідження повітропроникності бетонів різного віку: бетону у віці 28 діб, що імітує склад бетону, який застосовувався при будівництві станції, і бетону у віці 35 років з конструкції захисної оболонки.

3. Суть методики визначення повітропроникності конструкцій АЕС. Методика визначення повітропроникності бетону створена згідно з «Указания по подбору составов и контролю качества газонепроницаемых бетонов для защиты сооружений атомных электростанций» [4].

Згідно з вимогами, що висуваються до захисних оболонок АЕС, повітронепроникними можна вважати бетони, повітропроникність яких при тиску повітря 0,4 МПа не перевищує $G_n=1,0 \cdot 10^{-16}$ кг/м·с·Па (тобто, не більше $50 \frac{\text{см}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot 0,4 \text{ МПа}}$) [4]. Це значення розраховано виходячи з

умови допустимого значення швидкості витоку газу 0,3% на добу від об'єму захисної оболонки при проектній аварії, а також частки, що займають стіни в загальному значенні проникності поверхонь захисної оболонки атомної електростанції з реактором ВВЕР-1000.

Випробування проводили на зразках кубах, виготовлених в лабораторних умовах, та на кернах, вибурених із конструкції захисної оболонки.

Розмір зразків кубів – 100×100×100 мм. Зразки, після виготовлення, витримували 28 діб у камері нормального тверднення при температурі $20 \pm 2^\circ\text{C}$ та відносній вологості повітря 96...100 %.

Зразки-керни були вибурені із досліджуваної конструкції. Вони мали наступні розміри: діаметр та висота 100 мм. Зразки були відторцьовані з обох боків.

Повітропроникність бетону визначали при рівноважній вологості досліджуваних зразків.

Зразки встановлювали у спеціальні обойми, де вільні грані фіксувалися металевими кришками, які мали отвори для подачі та відбору повітря (рис. 1). Бічні поверхні зразків герметизували парафіном, який закривав пори зовнішніх граней бетонних зразків. Крізь вільну грань зразка здійснювали подачу повітря (рис. 1), при постійному значенні тиску, доки воно не починало виходити з протилежної вільної грані зразка. Необхідний тиск встановлювали за допомогою компресора та редуктора подачі повітря. Під час випробування підйом надлишкового тиску відбувався до необхідної величини (0,4 МПа) протягом 10 хв з витриманням не менше 1 год [4]. Під час дослідів проводили заміри повітря, що пройшло крізь зразок, а також час за який крізь зразок пройшов певний об'єм повітря.



Рис. 1. Зразки обтиснуті в обоймі

Повітропроникність зразка при тиску повітря 0,4МПа обчислювали за формулою (1):

$$G = \frac{V \cdot 3600}{t \cdot S_{zp}}, \text{ см}^3 / \text{год} \cdot \text{м}^2, \quad (1)$$

де V – вимірний об’єм повітря, що пройшов крізь зразок, см^3 ; t – час, за який крізь зразок пройшов об’єм повітря V ; S_{zp} – площа вільної поверхні грані, через яку проходить повітря, м^2 .

Повітропроникність визначали як середнє арифметичне ($X_{\text{сер}}$) для шести вимірювань об’єму повітря. Крім того, обчислювали коефіцієнт варіації досліду (V) та довірчі границі ε випадкової похибки вимірювань об’єму повітря, що пройшло крізь зразок.

4. Експериментальна частина. Оскільки з моменту будівництва оболонки минуло багато часу, а якість і показники властивостей щебеню, піску, цементу та добавок змінилися, то було зроблено підбір кількох складів бетону, що імітували склад реального бетону. Запропоновані склади бетону відрізнялися витратою цементу в менший і більший бік від реального складу ($\Pi=520 \text{ кг/м}^3$). Витрату компонентів на 1 м^3 бетону наведено в таблиці 1 (модельні склади бетону, які були використані для виготовлення зразків-імітантів).

Таблиця 1

№ п/п	Витрата компонентів на 1 м^3 бетону, кг			
	цемент М400 (клас 32,5 N)	пісок	щебінь фр.5-20	вода
1	500	654	1042	193
2	520	642	1034	200
3	550	570	1060	180

В якості сировинних матеріалів використовували портландцемент СЕМ II/A-S 32,5R виробництва Волинь-цемент, кварцовий пісок Дніпровського кар’єру з модулем крупності 1,29, гранітний щебінь Малинського кар’єру фракції 5-20 мм (5-10 мм ÷ 5-20 мм = 33% ÷ 67%) з маркою за дробильністю – 1200. В якості добавки використовували пластифікатор на основі лігносульфонатів.

Результати випробувань на міцність при стиску зразків модельних складів у віці 28 днів наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

№ складу бетону (таблиця 1)	Витрата цементу, кг	Осадка конуса, см	Міцність на стиск зразків, МПа	Середня міцність на стиск, МПа
1	500	9	37,65	37,9
			36,86	
			39,02	
2	520	13	51,67	50,76
			52,26	
			48,35	
3	550	11	52,28	53,35
			59,14	
			48,63	

Для подальших експериментів було обрано склад №2, оскільки він відповідав складу бетону, що застосовувався при будівництві захисної оболонки. Коефіцієнт варіації міцності для складу №2 складав 4,1%.

Аналіз даних журналів контролю міцності при бетонуванні захисних споруд атомної електростанції показують, що реальний склад бетону був запроєктований з перевищенням необхідної міцності М400 (клас бетону С25/30) і реальна марка бетону була практично М500 (С32/40). Таку ж міцність мають і бетони, що імітували реальний бетон. Таким чином, не дивлячись на використання різних сировинних матеріалів при виготовленні бетону в 1980-х роках і 2018 р., міцності при стиску зразків модельного складу відповідають міцності реального бетону, що був використаний при будівництві захисних оболонок АЕС.

Результати визначення повітропроникності бетону, склад якого імітував склад реального бетону, наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

№ зразка	Час проходження 1 см ³ повітря через зразок, с	Статистичні характеристики часу проходження 1 см ³ повітря крізь зразок
1	24,6; 27,9; 28,6; 25,8; 27,0; 26,2	$X_{сер} = 28,93с$ $S = 4,77$ $\epsilon = 9,73$ $X_{сер} = 28,93 \pm 9,73с$ $V = 16,5\%$
2	37,2; 36,8; 37,6; 36,2; 38,0; 24,5	
3	25,0; 23,5; 23,0; 24,3; 25,9; 26,1	
4	29,2; 30,2; 28,0; 30,2; 28,8; 29,6	

Значне перевищення отриманого показника повітропроникності бетону від необхідного пояснюється тим, що бетон є капілярно-пористим тілом із великою кількістю дефектів, мікротріщин, які змінюються в часі

[10, 11, 12, 13, 14, 15] і підтверджується раніш отриманими даними [5, 16]. Слід відмітити, що метод визначення повітропроникності бетону заснований на проходженні повітря крізь бетон по його дефектах. Таким чином, методика визначення повітропроникності бетону може служити методом дослідження процесів структуроутворення бетону та визначення ступеню його дефектності. Про значну дефектність структури бетону свідчить високе значення коефіцієнта варіації його повітропроникності, який складає 16,5%. В той час як коефіцієнт варіації міцності при стиску бетону - 4,1%, що свідчить про хорошу якість виготовленого бетону.

З зовнішнього боку захисної оболонки АЕС було вибурено один kern, який потім розрізаний на 3 зразка-керн. Під час експлуатації залізобетонна конструкція, з якої були вибурені керни, знаходилась в напруженому стані, а відповідно і бетон був стиснутий. Зразок-кern 1 – kern, що розташований на глибині стіни оболонки до 10 см і піддається дії атмосферних впливів. Зразок-кern 2-1 – знаходиться більш глибоко в захисній оболонці, а зразок-кern 2-2 – на глибині до 30 см від зовнішньої поверхні захисної оболонки.

Результати визначення повітропроникності бетону зразків-кernів із конструкцій АЕС наведені в таблиці 4.

Таблиця 4

№ зразка	Час проходження 1 см ³ повітря через зразок, с	Середній час проходження 1 см ³ повітря через зразок, с
Кern 1	457; 381; 360; 360; 360; 340	376 S= 37,97 ε =93,03 Xсер = 376±93,03 V≈10%
Кern 2-1	3900; 3360; 3360; 3600; 3580; 3480;	3547 S=201,47 ε =201,47*2,45=493,6 V=5,7%
Кern 2-2	> 18000 (5 годин)	> 18000

В результаті проведених робіт встановлено, що повітропроникність керн №1 висотою 101,5 мм становить: $1886,6 \pm 511,3 \text{ см}^3$. Експериментально отримана величина більш ніж у 37 разів перевищує допустимий $(50 \frac{\text{см}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}; 0,4 \text{ МПа})$. Коефіцієнт варіації показників

повітропроникності приблизно складає 10 %.

Повітропроникність керн №2-1 висотою 92,9 мм становить: $218,5 \pm 30,37 \text{ см}^3$. При похибці досліду 13,9 % і коефіцієнті варіації 5,7%. Експериментально отримана величина більш ніж у 4 рази перевищує допустиме значення.

Повітропроникність керн №2-2 висотою 103,5 мм становить: $38,6 \text{ см}^3$, що менше допустимого значення в 1,3 рази.

5. Результати досліджень повітропроникності. Аналізуючи отримані результати, можна прийти до висновку, що тривалий напружений

стиснутий стан бетону позитивно впливає на ущільнення його структури і призводить до зменшення коефіцієнта повітропроникності бетону. Напружений стан бетону створюється як стискаючою дією канатів, які створюють об'ємне напруження, так і стискаючою дією експлуатаційних навантажень. Інтенсивність процесів ущільнення структури бетону залежить від умов експлуатації конструкції: у поверхневому шарі такі навантаження менші та інтенсивність ущільнення менша. Крім того, зовнішній шар піддається впливу навколишнього середовища. По мірі просування глиб конструкції навантаження збільшуються, збільшується ступінь ущільнення структури бетону. Ці процеси і знайшли відображення в значеннях коефіцієнтів повітропроникності бетону в поперечному розрізі конструкції. Такий ефект підтверджено відомостями з літератури [17, 18, 19, 20].

На вирівнювання структури бетону в результаті тривалого тверднення в напруженому стиснутому стані свідчить і зменшення величини коефіцієнтів варіації повітропроникності бетону.

Потрібно відзначити, що бетон захисної оболонки з внутрішньої сторони захищений металевим листом, а умови тверднення його глибинних шарів відрізняються від поверхневих. В першу чергу це пов'язано зі збереженням вологи всередині бетону, оскільки у неї не було можливості випаровуватися. Наявність вологи у внутрішніх шарах бетону створювала сприятливі умови для його тверднення. Наявність сприятливих умов тверднення бетону в його глибинних шарах підтверджено і результатами випробувань цих бетонних кернів на міцність при стиску. Результати випробувань показали, що міцність бетону при стиску в глибинних шарах зросла більш ніж в 1,5 рази в порівнянні з міцністю зовнішнього шару.

Отже, аналізуючи отримані експериментальним шляхом дані, можна припустити, що бетон на глибині більше 30 см, у напрямку від зовнішньої поверхні захисної оболонки атомної електростанції, має не більшу повітропроникність, ніж бетон керну №2-2 (таблиця 4). Це пояснюється умовами експлуатації, оскільки ступінь обтиснення бетону на глибині від 30 см до 120 см не менший, ніж ступінь обтиснення керну №2-2. Таким чином, бетон захисної оболонки має необхідну повітропроникність за виключенням поверхневого шару глибиною до 30 см.

Висновки.

1. Встановлено, що метод визначення повітропроникності бетону є дуже чутливим до наявності дефектів бетону і може слугувати самостійним методом дослідження процесів структуроутворення бетонів. Повітропроникність бетону коливається в значних межах і залежить від технології виготовлення зразків і умов їх тверднення. З часом, в результаті тверднення бетону, його повітропроникність зменшується.

2. Визначення повітропроникності бетону кернів, вибурених із захисної оболонки АЕС, показало, що повітропроникність бетону реальних конструкцій значно менше, ніж зразків з бетону ідентичного модельного складу. Величина коефіцієнта повітропроникності бетону зразків модельного складу в 240 разів більше нормованої, а для бетону з реальної конструкції значно менше. Його величина, для бетону поверхневого шару,

більше нормованої величини тільки в 37 разів, а для глибинних шарів конструкції коефіцієнт повітропроникності бетону вже менше нормованого в 1,3 рази. Різниця коефіцієнтів повітропроникності бетону для зразків-кубів модельного-складу і бетонних кернів з реальної конструкції пояснюється тим, що з часом протікають процеси впорядкування структури бетону, її ущільнення. Інтенсивність процесів ущільнення структури бетону залежать від умов експлуатації конструкції: в поверхневому шарі протікають процеси корозії під дією зовнішніх впливів і тому інтенсивність ущільнення менша. По мірі просування вглиб конструкції збільшується ступінь ущільнення структури бетону. Ці процеси і знайшли відображення в значеннях коефіцієнтах повітропроникності бетону в поперечному перерізі конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кривенко П.В., Пушкарьова К.К.* та ін. Будівельне матеріалознавство: Підручник для студ. вищ. навч. закл. Київ, 2008. 690 с.
2. *Osman Wasfi, Mohammed Imbadi.* Experimental evolution of the properties of lightweight breathable concretes // Journal Advances in Applied Ceramics. Volume 116, 2017 – Issue 4: Cement Concrete Science, p.p. 225-229.
3. *Рунова Р.Ф., Шейніч Л.О.* та ін. Основи виробництва стінових та оздоблювальних матеріалів. - Київ, 2002. - 368 с.
4. Указания по подбору составов и контролю качества газонепроницаемых бетонов для защиты сооружений атомных электростанций. - К: НИИСК, 1991. - 48 с.
5. *Фаренюк Є.Г., Постол А.С.* Експериментальний аналіз повітропроникності фасадних систем з повітряним прошарком // Наука та будівництво, №1 (11), 2017. - С. 10-14.
6. *J.M. Wong, Fredrik Glasser, Mohammed Imbabi.* Breathable concrete for low energy buildings. // Conference: WREC 2005, At Aberdeen, Scotland (UK). URL: https://www.researchgate.net/publication/270282868_Breathable_concrete_for_low_energy_buildings.
7. *R.K. Dhir, P.C. Hewlett, Y.N. Chan.* Near surface characteristics of concrete: intrinsic permeability // Magazine of Concrete Research. ISSN 0024-9831. E-ISSN 1751-763X Volume 41 Issue 147, June 1989. - P.p. 87-97.
8. *Luis Ebensperger, Roberto Torren.* Concrete air permeability "in situ" test status quo // Revista Ingeniería de Construcción Vol. 25 N°3, Diciembre de 2010. - P.p. 371-382.
9. АТТМА. Air permeability testing. 2015. Дата оновлення: 21.02.18. https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Air_permeability_testing (Дата звернення: 04.01.19).
10. *Дорофеев В.С., Выровой В.Н.* Технологическая поврежденность строительных материалов и конструкций. – Одесса: Город мастеров, 1998. - 168 с.
11. *Сонов В.П., Решетняк Л.Н., Жданюк Н.И.* Активные и неактивные поры в бетоне // Сб. трудов IX Международная научно-практическая конференция ООО «Будиндустрия ЛТД», Запорожье, 2007. - С. 163-168.
12. *Шейніч Л.А., Пушкарева Е.К.* Процессы самоорганизации структуры строительных композитов. Киев, Гамма-Принт, 2009. 146 с.
13. *Md. Safiuddin.* Concrete Damage in Field Conditions and Protective Sealer and Coating Systems // Coatings 2017, 7(7), 90; doi:10.3390/coatings7070090
14. *Hornbostel K.* Relationship between concrete resistivity and corrosion rate – A literature review / K. Hornbostel, C. K. Larsen, M. R. Geiker // Cement and Concrete Composites. Vol. 39 – 2013. - P. 60–72. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2013.03.019
15. *Celik K.* Mechanical properties, durability, and life-cycle assessment of self-consolidating concrete mixtures made with blended portland cements containing fly ash and limestone powder / K. Celik, C. Meral, A. Petek Gursel, P.K. Mehta, A. Horvath, P.J.M. Monteiro // Cement and Concrete Composites. Vol. 56 – 2015. P. 59–72. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2014.11.003

16. *Tongji Daxue Xuebao*. Effect of permeability of concrete and air entrainment on durability of concrete // Journal of Tongji university 37(6). JUNE 2009. - P.P. 744-748.
17. *Берг О.Я.* Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. - 95 с.
18. *Стефанов Б.В., Русанова Н.Г., Волянський А.А.* Технологія бетонних і железобетонних изделий. Киев, «Вища школа», 1982. - 406 с.
19. *Hailong Wang, Xiaoyan Sun, Junjie Wang & Paulo J.M. Monteiro*. Permeability of Concrete with Recycled Concrete Aggregate and Pozzolanic Materials under Stress // Journal List Materials (Basel) v.9(4); 2016 Apr PMC5502916.
20. *Nikolova B., Taucer F., Mazars J.* Control of cracking and durability of reinforced concrete structures // 4th ConCrack workshop “Engineering and Standard issues. 2014. - 80 p. doi:10.2788/1999.

REFERENCES

1. *Krivenko P.V., Pushkarova K.K.* and other. (2008) Budivne materialoznavstvo (Building Material Science): Pidruchnyk dla studentiv vyshchikh navchalnykh zakladiv. Kyiv. 690.
2. *Osman Wasfi, Mohammed Imbadi.* (2017). Experimental evolution of the properties of lightweight breathable concretes. Journal Advances in Applied Ceramics. Volume 116. Issue 4: Cement Concrete Science. – P. 225-229.
3. *Runova R.F., Sheinich L.O.* and other. (2002). Osnovy vyrobnytstva stinovykh ta ozdobiuvalnykh materialiv (Basis of production the materials for wall and finishing). - Kyiv. - 368 p.
4. Ukazaniya po podboru sostavov i kontroliu kachestva gazoneproniaemykh betonov dla zashchity sooruzhenii atomnykh elektrostancii (Uidelines for the selection of compositions and quality control of gas-tight concretes to protect the structures of nuclear power plants). (1991). Kyiv. NIISK. – 48 p.
5. *Farennyuk E.G., Postol A.S.* (2017). Eksperymentalnyi analiz povitropronyknosti fasadnykh system z povitrianyom prosharkom (Experimental analysis of air permeability of air-layer facade systems). - Nauka i budivnytstvo, №1 (11). – P. 10-14.
6. *Wong J.M., Glasser F., Imbabi M.* (2005). Breathable concrete for low energy buildings, Conference: WREC, At Aberdeen, Scotland (UK). Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/270282868_Breathable_concrete_for_low_energy_buildings.
7. *Dhir R.K., Hewlett P.C., Chan Y.N.* (1989). Near surface characteristics of concrete: intrinsic permeability. Magazine of Concrete Research. ISSN 0024-9831. E-ISSN 1751-763X Volume 41 Issue 147, 87-97.
8. *Luis Ebersperger, Roberto Torren.* (2010). Concrete air permeability "in situ" test status quo. Revista Ingeniería de Construcción Vol. 25 N°3, 371-382.
9. ATTMA. (2015). Air permeability testing. Retrieved from https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Air_permeability_testing.
10. *Dorofeev V.S., Vyrovoy V.N.* (1998). Tekhnologicheskaia povrezhdennost stroitelnykh materialov i konstruktсии (Technological damage to building materials and structures). – Odessa: Gorod masterov. – 168 p.
11. *Sopov V.P., Reshetniak L.N., Zhvaniuk N.I.* (2007). Aktivnye i neaktivnye pory v betone (Active and inactive pores in concrete). Sbornik trudov IX Mezhdunarodnaia nauchno-prakticheskaiia konferentsiia “Budindustriia LTD”, Zaporizhzhia. – P. 163-168.
12. *Sheinich L.O., Pushkarova K.K.* (2009). Protseesi samoorganizatsii struktury stroitelnykh kompozitov (The processes of self-organization of the structure of building composites). – K.: Gamma-Print. - 146 p.
13. *Md. Safiuddin.* (2017). Concrete Damage in Field Conditions and Protective Sealer and Coating Systems. 7(7), 90. doi:10.3390/coatings7070090
14. *K. Hornbostel, C. K. Larsen, M. R. Geiker.* (2013). Relationship between concrete resistivity and corrosion rate – A literature review. Cement and Concrete Composites. Vol. 39. 60–72. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2013.03.019
15. *K. Celik, C. Meral, A. Petek Gursel, P.K. Mehta, A. Horvath, P.J.M. Monteiro* (2015). Mechanical properties, durability, and life-cycle assessment of self-consolidating concrete mixtures made with blended portland cements containing fly ash and limestone powder. Cement and Concrete Composites. Vol. 56. 59–72. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2014.11.003

16. *Tongji Daxue Xuebao*. (2009). Effect of permeability of concrete and air entrainment on durability of concrete. // Journal of Tongji university 37(6). – P. 744-748.
17. *Berg O.Ia.* (1974). Fizicheskie osnovy teorii prochnosti betona I zhelezobetona (Physical basis of the theory of strength of concrete and reinforced concrete). Moskva, Stroizdat. - 95 p.
18. *Stefanov B.V., Rusanova N.G., Volianskii A.A.* (1982). Tekhnologiya betonnykh I zhelezobetonnykh izdelii (Concrete and reinforced concrete products technology). Kyiv, «Vyscha shkola». - 406 p.
19. *Hailong Wang, Xiaoyan Sun, Junjie Wang & Paulo J.M. Monteiro.* (2016). Permeability of Concrete with Recycled Concrete Aggregate and Pozzolan Materials under Stress. Journal List Materials (Basel) v.9(4); Apr PMC5502916.
20. *Nikolova B., Taucer F., Mazars J.* (2014). Control of cracking and durability of reinforced concrete structures. 4th ConCrack workshop “Engineering and Standard issues, 80. doi:10.2788/1999.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Farenjuk G.G., Nemchinov Iu.I., Bambura A.N., Sheinich L.A., Mykolalets M.G., Mudryk M.S.

THE CHANGE OF AIR PERMEABILITY OF CONCRETE IN TIME

The air permeability of heavy concrete is an important indicator and its value is normalized with the application of concrete in protective shells of nuclear power plants. The critical value of the air permeability index of concrete is determined from the condition of the permissible velocity of air flowing through the shell in the design basis accident. Today, this value is achieved mainly due to constructive solutions in the design of the protective shell.

The article presents the results of research on the compliance of concrete with the established requirements for its air permeability for a comprehensive justification for further safe operation of nuclear power plants for 25 years after the achievement of the project life (30 years).

To obtain the necessary indicators for calculations, a model composition of concrete was designed so that it corresponded to real concrete of nuclear power plant protective shells from which the specimens were made. A comparative study of air permeability of concrete at different age were made, such as concrete at the age of 28 days simulating the composition of concrete used in the construction of the nuclear power plant, and concrete at the age of 35 years selected from the protective shell of the nuclear power plant.

The air permeability of concrete at the age of 28 days does not meet the requirements of safe operation of nuclear power plants. At the same time, it was established that concrete selected from the protective shell, meets the requirements for the safety of operation of the nuclear power plants. The obtained results are explained by the processes of compacting the concrete in time.

Key words: nuclear power plant, concrete, air permeability, structure, cement stone.

Фаренюк Г.Г., Немчинов Ю.И., Бамбура А.М., Шейнич Л.А., Миколаец М.Г., Мудрик Н.С.

ИЗМЕНЕНИЕ ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТИ БЕТОНА ВО ВРЕМЕНИ

Определено изменение воздухопроницаемости тяжелого бетона во времени. Показана актуальность этого показателя для обеспечения безопасной эксплуатации атомных электростанций. Проведены сравнительные испытания по определению воздухопроницаемости бетонов одинакового состава в возрасте 28 суток и бетонов в возрасте более 35 лет, которые были выбурены с защитной оболочки атомной электростанции. Установлено, что воздухопроницаемость бетона меняется со временем в направлении ее уменьшения. Воздухопроницаемость бетонов в возрасте 28 суток не соответствует требованиям безопасной эксплуатации атомных электростанций. В то же время бетон с защитной оболочки обеспечивает требования по безопасности эксплуатации станций. Полученные результаты объясняются процессами уплотнения структуры бетона во времени, вызванного обжатием предварительно напряженными канатами на бетон.

Ключевые слова: атомная электростанция, бетон, воздухопроницаемость, структура, цементный камень.

УДК 691.32

Фаренюк Г.Г., Немчинов Ю.І., Бамбура А.М., Шейніч Л.О., Миколаєць М.Г., Мудрик М.С.
Зміна повітропроникності важкого бетону у часі // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 25-36.

Досліджено зміну повітропроникності важкого бетону у часі.

Табл. 4. Іл. 1. Бібліогр. 20 назв.

UDC 691.32

Farenjuk G.G., Nemchinov Yu.I., Bambura A.N., Sheinich L.A., Mykolaiets M.G., Mudryk M.S.
The change of air permeability of concrete in time // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 25-36. – Ukr.

The air permeability of heavy concrete in time is studied.

Tabl. 4. Fig. 1. Ref. 20.

УДК 691.32

Фаренюк Г.Г., Немчинов Ю.І., Бамбура А.М., Шейніч Л.А., Миколаєц М.Г., Мудрик Н.С.
Изменение воздухопроницаемости бетона во времени // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вип. 102. - С. 25-36.

Исследовано изменение воздухопроницаемости тяжелого бетона во времени.

Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. 20 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, директор інституту ФАРЕНЮК Геннадій Григорович

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України

E-mail: farenjuk@ndibk.gov.ua

Контактний тел.: +38044-249-72-34

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5703-3976>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, перший заступник директора інституту НЕМЧИНОВ Юрій Іванович

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України

E-mail: yu.nemch@ndibk.gov.ua

Контактний тел.: +38044-249-37-97

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-6618-12X>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач відділу надійності конструкцій будівель і споруд БАМБУРА Андрій Миколайович

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України

E-mail: abamdura@gmail.com

Контактний тел.: +38067-238-22-34

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1402-3345>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач відділу технології виробництва залізобетонних конструкцій ШЕЙНІЧ Леонід Олександрович

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України

E-mail: lenid312@gmail.com, schein@ndibk.gov.ua

Контактний тел.: +38067-70-88-319

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7684-9495>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, завідувач лабораторії корозії та захисту будівельних конструкцій МИКОЛАСЦЬ Максим Григорович
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України
Адреса домашня: 03118 Україна, м. Київ, пр-т В. Лобановського, 126, кв. 74.
E-mail: mykolayets@ndibk.gov.ua
Контактний тел. +38096-224-78-79
ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-8823-3401>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): провідний технолог Мудрик Микола Степанович
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, вул. Преображенська, 5/2, Державне підприємство «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» Мінрегіон України
E-mail: otradny1961@bigmir.net
Контактний тел. +38044-249-38-41
ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7391-7723>

UDC 539.3

TRANSITIONAL REGIMES UNDER ROUTE TO CHAOS IN VIBROIMPACT SYSTEM

V.A. Bazhenov

O.S. Pogorelova

T.G. Postnikova¹

*Kyiv National University of Construction and Architecture,
31, Povitroflotskiy avenu, Kyiv, Ukraine*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.37-45

In recent years in nonlinear dynamics particular attention was paid to studying the chaotic behaviour of dynamical systems and their routes to chaos. Sometimes this route may be intricate. We watched such intricate route to chaos when studying the quasi-periodic route to chaos in strongly nonlinear non-smooth discontinuous vibroimpact system that was two-body 2-DOF one. After Neimark-Sacker bifurcation many different regimes replace each other. There are transitional regimes with inconsistent characteristics among them. We analyze these regimes with continuous wavelet transform CWT applying. CWT plots confirm just their transition kind and give clear picture of different frequencies presence in time series and their distribution in time.

Keywords: vibroimpact system, route to chaos, transitional regime, Poincaré map, Fourier spectrum, continuous wavelet transform.

1. Introduction

At present chaotic dynamics is one of the most interesting and investigated subjects in nonlinear dynamics. Now it is well known that just deterministic chaos is not an exceptional mode of dynamical systems behaviour; on the contrary, chaotic behavior occurs in many dynamical systems in mathematics, mechanics, engineering, physics, chemistry, biology and medicine. Therefore, the studying of chaotic dynamics is one of the main ways of modern natural science development. Now the theory of chaotic vibrations is well developed and is continuing to develop further [1-3].

Let us underline that dynamical deterministic chaos occurs in entirely deterministic systems only under the control parameter changing without any random external influence. And this changing may be very small.

The routes to chaos in nonlinear dynamical systems are of the special scientists' interest. It is known three main routes to chaos in dynamical systems [1, 3]:

- 1) period-doubling route to chaos – the most celebrated scenario for chaotic vibrations, it is Feigenbaum scenario;
- 2) quasiperiodic route to chaos;
- 3) intermittent route to chaos by Pomeau and Manneville.

We have studied the quasi-periodic and intermittent routes to chaos in vibroimpact system in our previous works [4,5] and references therein.

Vibroimpact system is strongly nonlinear non-smooth discontinuous dynamical system. The studying of its dynamical behaviour has certain

¹ Corresponding author. E-mail address: posttan@ukr.net

difficulties because of its non-smoothness and discontinuity. When we are comparing the quasi-periodic and intermittent routes to chaos in our vibroimpact system we see that the quasi-periodic route is considerably more intricate than intermittent one. Different oscillatory regimes replace each other many times under very small control parameter varying. There are periodic subharmonic regimes – chatters, quasiperiodic, and chaotic regimes. There are the transitional regimes which occur between other defined ones. What are the transitional regimes? They occur in the zones of transition from one regime to another, they correspond to prechaotic or postchaotic motion. They have the inconsistent characteristics: their Fourier spectrum fits to the one regime kind, Poincaré maps – to another. So we cannot say something specified about its kind.

Therefore we decided to test new technique in order to characterize this multiscale behaviour. This new technique is Continuous wavelet transform CWT.

Wavelet analysis is useful for recognizing periodic and chaotic motions both in the frequency and time domain. It turned out to be an efficient tool for the studying of vibroimpact system dynamic behaviour. In particular it permits the detection of unconformities and other abrupt changes in signal.

In recent years, the wavelet analysis has been applied in many scientific fields. Much commercial software can present the function of wavelet analysis, such as Mathcad and Matlab.

The CWT applying for studying our vibroimpact system dynamic behaviour was very successful one. It was very useful for distinguishing periodic and chaotic regimes. We have “caught” the intermittency due to its helping [5]. It is worth to point out that the intermittency finding is not such an easy task. It is difficulty to discover it by usual ways such as phase trajectories, Poincaré maps, and Fourier spectra construction, even the Lyapunov exponent estimation. Let us remind that under intermittency the laminar phases (periodic regimes) alternate with turbulent ones (chaotic bursts) when the control parameter having the same value. Just because its Fourier spectrum is board and continuous and all other characteristics are such as ones under the chaotic motion. But CWT gives the information about time dependence of the different frequencies. So CWT copes with intermittency recognizing well. It is the reason for analysis of transitional regimes with CWT helping.

2. Where the transitional regimes were discovered

We consider the strongly nonlinear non-smooth discontinuous dynamical system which is two body 2-DOF vibroimpact system (Fig. 1) under periodic external loading $F(t) = P\cos(\omega t + \varphi_0)$. Its dynamical behaviour was studied in details in our previous works [4, 5] and references therein. Its amplitude-frequency responses in wide frequency range are depicted at Fig. 1 too.

We have watched the quasi-periodic route to chaos, the transient chaos, and hysteresis effects (jump phenomena) in very narrow frequency range $7.45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} < \omega < 8.0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. It is the region between points *K* and *L* on amplitude-frequency response where Neimark-Sacker bifurcations occur. At Fig. 2 we show the largest Lyapunov exponent dependence on control parameter that is the frequency of external loading.

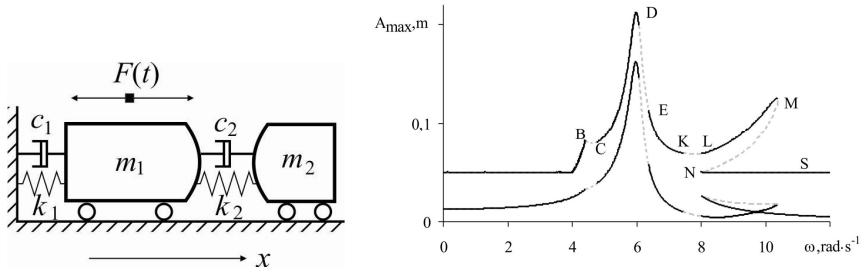


Fig.1. Vibroimpact system model and amplitude-frequency responses

It is worth to remind that the sign of largest Lyapunov exponent λ determines sufficiently well the kind of oscillatory motion: the negative sign $\lambda < 0$ corresponds to periodic regimes, the positive sign $\lambda > 0$ – to chaotic ones, and $\lambda \approx 0$ – to quasi-periodic oscillatory regimes. We see sufficiently intricate route to chaos at this plot. Different oscillatory regimes succeed each other many times under very small control parameter varying in narrow frequency range. There are periodic subharmonic regimes with long period and big number of impact per cycle – chatters, quasiperiodic, and chaotic regimes. The hysteresis effects (jump phenomena) are observed at two frequency ranges.

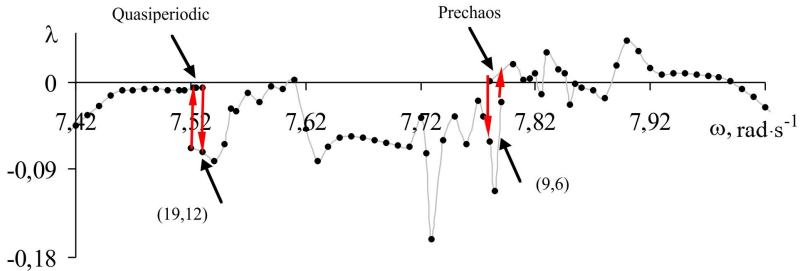


Fig. 2. The largest Lyapunov exponent dependence on control parameter

We see two regions of transitional regimes which occur between other ones. All of them have the small largest Lyapunov exponents, which are near the zero. These regimes are similar to one another. All of them have the conflicting characteristics.

3. Analysis of transitional regimes

Let us have a more attentive look at the transitional regimes. Let us attempt to use continuous wavelet transform CWT for more precise its determination. We use software Matlab with Morlet wavelet.

In [5] we showed the view of surfaces of wavelet coefficients (3D plots) and their projections for periodic and chaotic motion. They had different well-pronounced views.

Now let us first have a look at the view of quasi-periodic motion at the wavelet plots. At Fig. 3 we show the characteristics of quasi-periodic regime for attached body m_2 under $\omega = 7.51 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

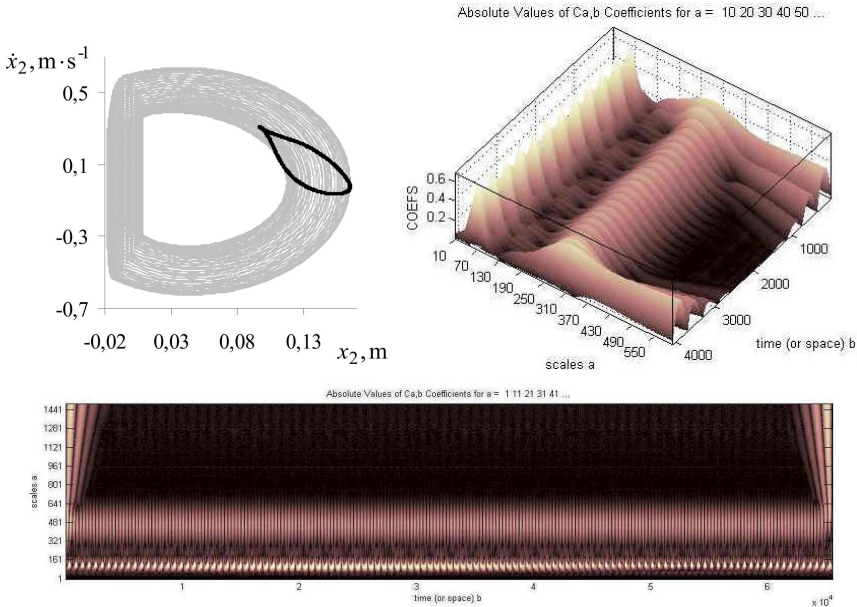


Fig. 3. Phase trajectories, Poincaré maps, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for quasi-periodic regime under $\omega = 7.51 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (Colour online)

The wavelet plots have not well-pronounced view, they are similar the plots for periodic motions with long periods and big number of impacts per cycle. It is logical as the quasi-periodic motion is *almost* periodic one.

Now let us have a look at the characteristics of the transitional regime under $\omega = 7.61 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. We show its phase trajectories with Poincaré map and Fourier spectrum in logarithmic scale at Fig. 4 (for main body m_1). Its Poincaré map is almost closed curve as under quasi-periodic regime, but Fourier spectrum is board and continuous, such as under chaotic motion. These characteristics are inconsistent ones. This regime isn't quasi-periodic, isn't chaotic one. Maybe its wavelet characteristics can show its kind more precisely? At Fig. 4 the wavelet surface projection and surface of wavelet coefficients for this regime are depicted. We see two high frequencies with strong power and a lot of low frequencies with very weak power which provide the continuous Fourier spectrum. They change little in time that provides almost closed curve on Poincaré map. These plots don't make idea about this regime more precise one. But they confirm that this regime does not belong to the kind of quasi-periodic or chaotic one. It is exactly transitional regime.

Let us have more attentive look at the second region of transitional motions under $7.815 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} < \omega < 7.90 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. We see the chaotic regimes under $\omega = 7.80, 7.81, 7.815 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. The characteristics for such regime under $\omega = 7.815 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ are depicted at Fig. 5.

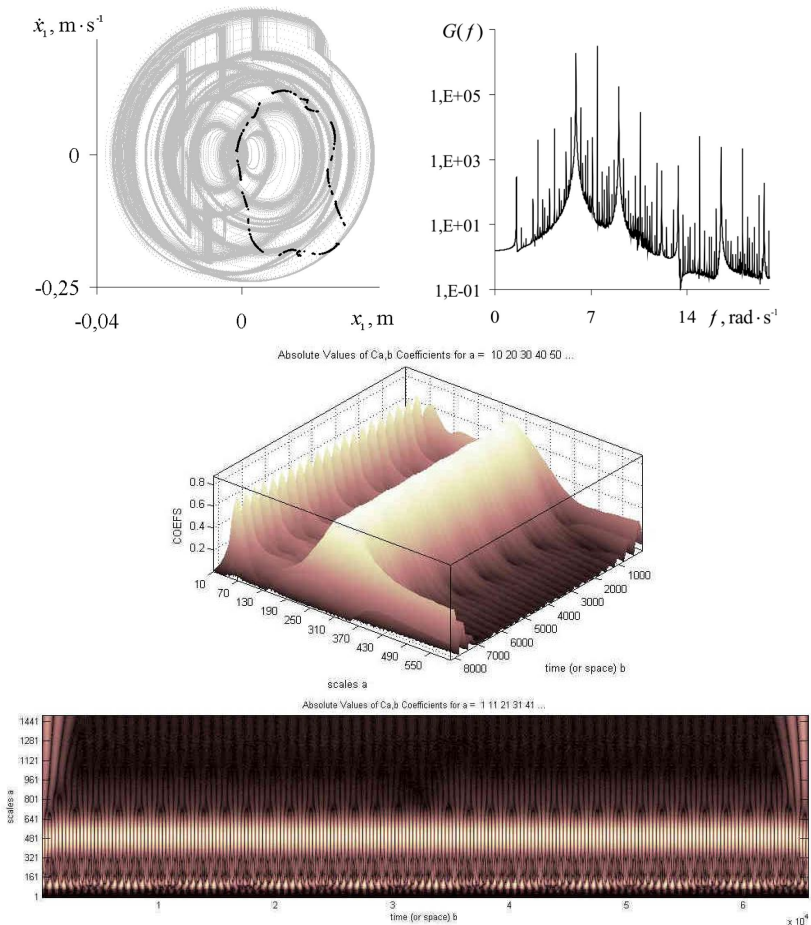


Fig. 4. Phase trajectories, Poincaré map, Fourier spectrum, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for transitional regime, $\omega=7.61 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda=0.0027$ (Colour online)

These plots have the view which is typical for chaotic motion. Poincaré map is disordered set of points in limited space. The plots of wavelet characteristics display two high frequencies with strong power and a lot of low frequencies with weak power that provide a board continuous Fourier spectrum. It is seen well that all of them are changing in time.

Then we see transitional (prechaotic) regime under $\omega = 7.82, 7.825 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Its Poincaré map has the set of separate points, but its Fourier spectrum is board and continuous one. Its characteristics under $\omega = 7.82 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ are depicted at Fig. 6.

And immediately after this we see the chaotic motion under $\omega = 7.83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (Fig. 7).

We succeeded in finding chaotic regime only under $\omega=7.83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Immediately after it the transitional regimes with sets of separate points at Poincaré maps and with board continuous Fourier spectra exist under $\omega = 7.84$,

7.845, 7.85 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, and further till $\omega = 7.90 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. They are prechaotic or postchaotic regimes. The characteristics of such regime under $\omega = 7.845 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ are depicted at Fig. 8.

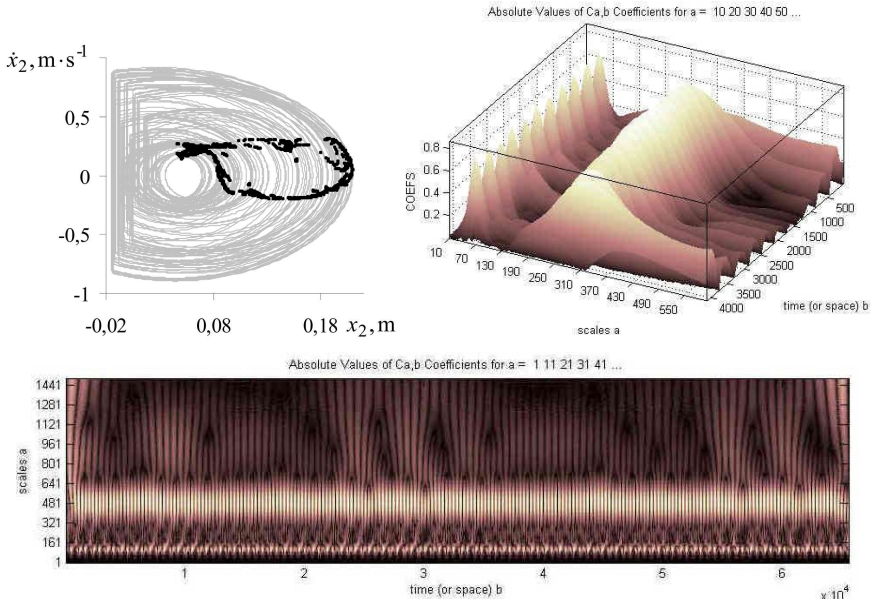


Fig. 5. Phase trajectories, Poincaré maps, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for chaotic regime under $\omega = 7.815 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (Colour online)

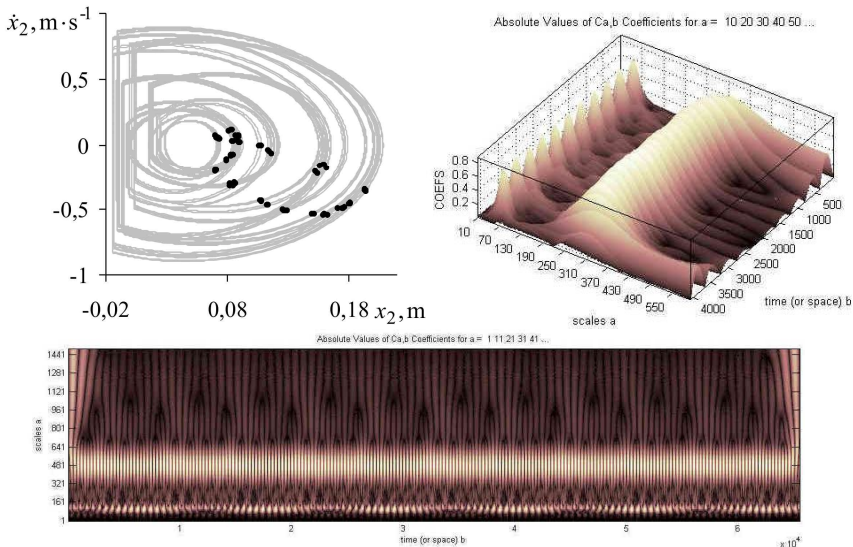


Fig. 6. Phase trajectories, Poincaré maps, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for transitional (prechaotic) regime under $\omega = 7.82 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (Colour online)

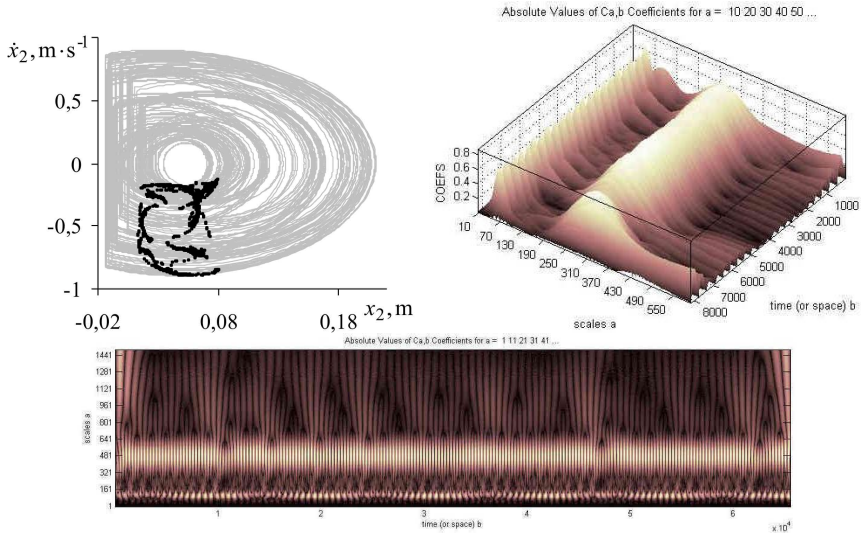


Fig. 7. Phase trajectories, Poincaré maps, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for chaotic regime under $\omega = 7.83 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (Colour online)

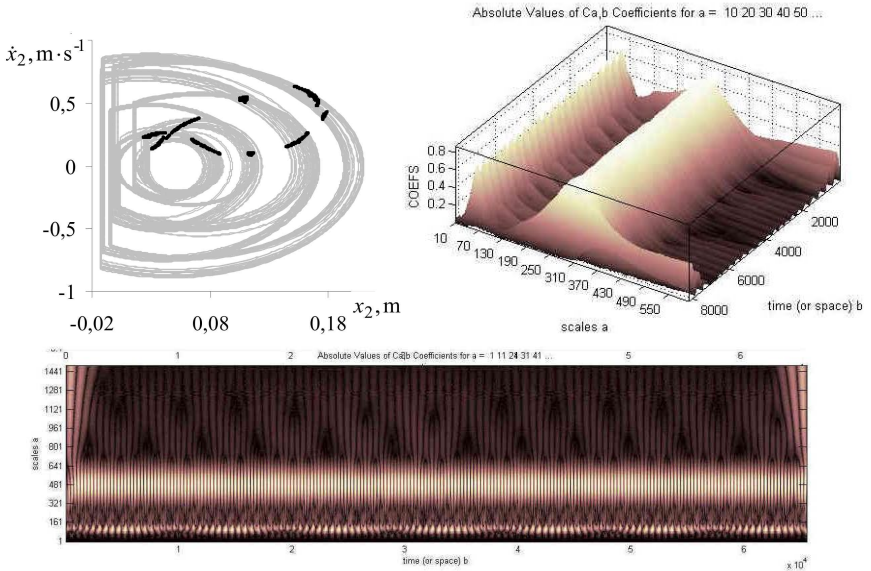


Fig. 8. Phase trajectories, Poincaré maps, wavelet surface projection, and surface of wavelet coefficients for transitional regime under $\omega = 7.845 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (Colour online)

Further in narrow frequency range $7.90 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \leq \omega \leq 7.92 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ the really chaotic motion occurs. It is transient chaos. We have examined it in details in [4], therefore now we'll not discuss it.

We see that all these transitional regimes are similar to one another, they have: the small largest Lyapunov exponent, the set of separate points or almost closed curve on Poincaré map, and the board continuous Fourier spectrum. The characteristics obtained by continuous wavelet transform using also are alike very much.

We see two high frequencies with strong power and a lot of low frequencies with very weak power which provide the continuous Fourier spectrum. They change little in time that provides almost closed curve or a lot of separate points on Poincaré map.

4. Conclusion

Continuous wavelet transform CWT is very useful for intermittency recognition and distinguishing the periodic and chaotic regimes. It is indispensable when recognizing the intermittency. So it is logical to apply it when studying the transitional modes.

Transitional regimes are similar to one another, they have: the small largest Lyapunov exponent, the set of separate points or almost closed curve on Poincaré map, and the board continuous Fourier spectrum. The characteristics obtained by continuous wavelet transform applying also are alike very much. The CWT plots confirm that these regimes don't belong to the kind of quasi-periodic or chaotic one. They are exactly transitional regimes. The CWT plots demonstrate the presence of different frequencies in time series and their distribution in time very clearly. Thus continuous wavelet transform is very useful in order to understand well what is this or that transitional mode.

REFERENCES

1. *Moon F.C.* Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. – New York : Wiley, 1987. – 219 P.
2. *Kuznetsov S.P.* Dynamical chaos //Moscow: Fizmatlit. -2006.-356 P. – 2001.
3. *Schuster H.G.* Deterministic Chaos. An Introduction 2nd Revised Edition. – 1988.
4. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S. & Postnikova T.G.* Invariant Torus break-down in vibroimpact system – route to crisis?. //Strength of Materials and Theory of Structures. – 2018. – V. 100. – P. 3-17.
5. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. & Lukianchenko O.O.* Wavelet transform using for analysis of vibroimpact system chaotic behavior. //Strength of Materials and Theory of Structures. – 2018. – V.101. – P. 14-25.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

ПРОМІЖНІ РЕЖИМИ ПІД ЧАС ПЕРЕХОДУ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ ДО ХАОСУ

В останні роки в нелінійній динаміці особлива увага приділялася вивченню хаотичної поведінки динамічних систем та сценаріїв їхнього переходу до хаосу. Інколи такий перехід буває складним. Ми спостерігали такий складний перехід до хаосу під час досліджування квазіперіодичного сценарію переходу в сильно нелінійній негладкій розривній двох масовій віброударній системі з двома ступнями вільності. Після біфуркації Неймарка-Сакера багато різних режимів заміняли один одного. Серед них були проміжні (перехідні) режими з суперечливими характеристиками. Ми аналізуємо ці режими застосовуючи безперервне вейвлет перетворення CWT. Його зображення підтверджують саме їхній перехідний тип та дають наочну картину наявності у часовому ряді різних частот та їхнього розподілу в часі.

Ключові слова: віброударна система, сценарій переходу до хаосу, проміжний режим, відображення Пуанкаре, спектр Фур'є, безперервне вейвлет перетворення.

UDC 539.3

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Transiynonal regimes under route to chaos in vibroimpact system// Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue. 102. – P. 37–45.

In recent years in nonlinear dynamics particular attention was paid to studying the chaotic behaviour of dynamical systems and their routes to chaos. Sometimes this route may be intricate. We watched such intricate route to chaos when studying the quasi-periodic route to chaos in strongly nonlinear non-smooth discontinuous vibroimpact system that was two-body 2-DOF one. After Neimark-Sacker bifurcation many different regimes replace each other. There are transitional regimes with inconsistent characteristics among them. We analyze these regimes with continuous wavelet transform CWT applying. CWT plots confirm just their transition kind and give clear picture of different frequencies presence in time series and their distribution in time.

Fig. 8. Ref. 5

УДК 539.3

Баженів В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Проміжні режими під час переходу віброударної системи до хаосу// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.– К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 37–45.

В останні роки в нелінійній динаміці особлива увага приділялася вивченню хаотичної поведінки динамічних систем та сценаріям їхнього переходу до хаосу. Інколи такий перехід буває складним. Ми спостерігали такий складний перехід до хаосу під час досліджування квазіперіодичного сценарію переходу в сильно нелінійній негладкій розривній двох масовій віброударній системі з двома ступнями вільності. Після біфуркації Неймарка-Сакера багато різних режимів заміняли один одного. Серед них були проміжні (перехідні) режими з суперечливими характеристиками. Ми аналізуємо ці режими застосовуючи безперервне вейлет перетворення CWT. Його зображення підтверджують саме їхній перехідний тип та дають наочну картину наявності у часовому ряді різних частот та їхнього розподілу в часі.

Лл. 8. Бібліогр. 5 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки **БАЖЕНОВ** Віктор Андрійович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ** Віктору Андрійовичу

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29;**Мобільний тел.:** +38(067) 111-22-33;**E-mail:** vikabazh@ukr.net**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОГОРЕЛОВА** Ольга Семенівна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОГОРЕЛОВІЙ** Ользі Семенівні.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29**Мобільний тел.:** +38(067) 606-03-00**E-mail:** pogos13@ukr.net**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-5522-3995>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОСТНІКОВА** Тетяна Георгіївна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОСТНІКОВІЙ** Тетяні Георгіївні.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29**Мобільний тел.:** +38(050) 353-47-19**E-mail:** posttan@ukr.net**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-6677-4127>

UDC 624.042

SOME ASPECTS OF VERTICAL CYLINDRICAL SHELLS' CALCULATION AT THE UNSYMMETRICAL LOAD

A.V. Makhinko¹,

Doctor of Technical Sciences, Senior Research Officer,
the Head of sScientific and Technological Department

N.O. Makhinko²,

Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the Department of Computer
Technologies of the Construction

¹*Ethual" LLC*

*Bortnytska street 1, Petropavlovskaya village, Borispol district, Kyiv region, 08341, Ukraine; e-mail:
pasargada1981@gmail.com*

²*National Aviation University*

Kosmonavt Komarov avenue, 1, 03058, Kyiv, Ukraine; e-mail: pasargada1981@gmail.com

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.46-52

The paper deals with the influence of the harmonica's parameters of the unsymmetrical load, which is represented by trigonometric cosine-series. The analysis is based on the results of practical calculations of the silo capacities' constructions by using the moment theory on the influence of the changeable wind load. The model of the silos construction is schematized in the form of orthotropic cylindrical shell of revolution with different thickness of the wall in meridional and circular directions, which allow approximately, considering the existence of vertical stiffeners.

Keywords: cylindrical shell, unsymmetrical load, silo capacity, stiffeners, wind effect, harmonica of the load.

Introduction. The deflected mode of the cylindrical shell, which is strengthened by vertical stiffeners in conditions of the unsymmetrical radial load, is characterized by pretty difficult processes of internal efforts' changing and processes of deformation in its separated elements. The detailed analysis of all calculation's aspects of such construction allows using received results for real construction projects in the future.

Problem statement and its solving. A cylindrical shell is the classic model of vertical steel capacities for grain storage. The main changeable load for the given type of construction is the wind pressure, which is well approximated by the series of cosines. The non-uniform distribution of the wind load is considered by the function of aerodynamic coefficient which in its turn is factorized into the finite trigonometric series [1]. Practical calculations of silos is limited by using only first 5-6 terms of series, but the sufficient argumentation of this fact is not given.

The analysis of recent research and publications. The classic problem of calculation of cylindrical shells of revolution by using moment or momentless theories is well described in works of famous native researchers [2, 3, 4, 5]. With respect to the real constructions of silo capacities it should be mentioned works of foreign scientists [6, 7, 8, 9]. Defining the internal efforts in elements of steel cylindrical capacities under the axially symmetric load is analyzed in the authorial research [10].

Formulation of the paper's purpose. The procedure of factorization of external unsymmetrical load is simplifying determination of the functional connection between parameters of the load and the deflected mode [1], since consequently calculation could be used to every constituent of the load separately. Probably in this case the parameter of the load's harmonica is the main factor, which influence deflected mode of the construction. Besides, the given value is influence the body of the shell differently, depending on the relation of its overall sizes, thickness and invoice of the wall (in real capacities of storage the body could be made of flat or corrugated plates of different thickness).

If terms of series of aerodynamic coefficient's factorization of wind load are growing, then, correspondingly, the accuracy of calculation for vertical cylindrical silos is growing, but the complexity of calculations is also growing. Consequently, there is a natural question about sufficient and minimum possible number of terms of series, and, correspondingly, the reaction of the construction.

The main research material. For the solution of the formulated purpose it were conducted calculations of the silo capacities, which differed in height ($H_w = 10...30$ m) and in thickness of the main elements, such as wall and ribs, ($t_w = t_p = 2...6$ mm) at the unsymmetrical wind load by using the moment theory. The model of the silo's construction was schematized in the form of the orthotropic cylindrical shell of revolution, which is hardly clamped near the basis.

The constituent of the wind load was presented in the form of

$$W_k = A_k \cos(k\varphi), \quad (1)$$

where A_k is the amplitude value of the k constituent; φ is the corner of the attack, which consider wind direction. The non-uniform distribution of the wind load around the perimeter of the capacity was considered through the function of aerodynamic coefficient $C_{aer}(\varphi)$

$$C_{aer}(\varphi) = a_0 + a_1 \cos(\varphi) + a_2 \cos(2\varphi) + \dots + a_k \cos(k\varphi) + \dots + a_m \cos(m\varphi), \quad (2)$$

where a_k are coefficients of factorization of the aerodynamic coefficient $C_{aer}(\varphi)$ into the trigonometric series [1].

The unknown internal efforts and displacements expressed through the function $\xi_k(x)$, which was found by solving the linear differential equation [1]

$$\frac{d^4 \xi_k(x)}{dx^4} + 4\eta_{w,k}^4 \xi_k(x) = 4\eta_{w,k}^4 \xi_{k,0}, \quad (3)$$

where $\eta_{w,k}^4$ is the value, which considers rigid characteristics of the shell in predetermined conditions of k harmonica of the load; $\xi_{k,0}$ is the coefficient of proportion, which has dimension of the function $\xi_k(y)$ and considers the character of the harmonious load W_k .

Total deflected mode of the capacity is defined by the way of adding separate deflected modes of the k influence

$$R_D(y, \varphi) = \sum_{k=0}^m a_k R_k(y, \varphi), \quad (4)$$

where R is the generalized parameter of reaction $R = \sigma_p \vee \tau \vee w \vee v \vee u$; σ_p and τ are normal and contacting loads, correspondingly; u, w, v are the main displacements (longitudinal, radial and circular); $y = x / H_w$ is the non-dimensional height, which is equal to the relation of the coordinate x and the height of the capacity H_w .

In the common procedure of defining internal efforts and displacements we will denote the next moments. Zero term of series (4) corresponds to the axially symmetric load, and, consequently, it does not cause any efforts in ribs. The second constituent $a_1 R_1$ causes an ordinary bend of the capacity. The other terms of series (4) when $k \geq 2$ is expressed by the formula

$$R_D(y, \varphi) = \sum_{k=1}^m r_{D,k}(y) \cos(k\varphi), \quad \vee \quad R_D(y, \varphi) = \sum_{k=1}^m r_{D,k}(y) \sin(k\varphi), \quad (5)$$

where $r_{D,k}(y)$ is the value, which is corresponding the reaction of the capacity in the point $(y; \varphi = 0)$ on the function's cosine (sinus) of reaction's changing by φ .

The received values of reaction were reflected in the non-dimensional polar system of coordinates (see fig. 1) in the form of dependence

$$\rho_D(\varphi) = R_D / \max(R_D). \quad (6)$$

Results of the capacities' calculation in the form of the scheme of the body displacements of capacities are partially given in fig. 2.

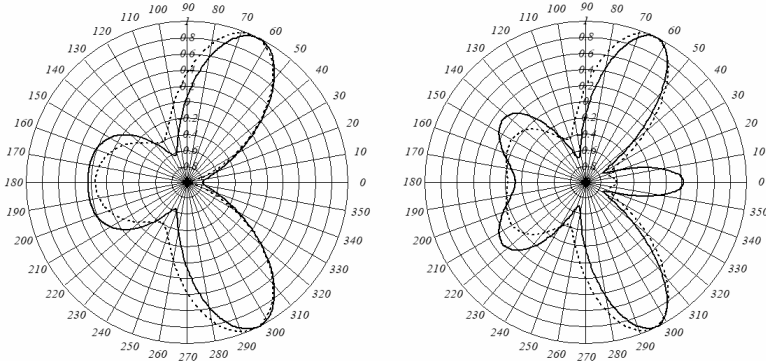


Fig. 1. Introduction of the capacities' reactions in the non-dimensional polar coordinates

The analysis of calculations showed that differences are shown not only quantitatively, but also qualitatively, depending on values of elongation Δ_w (relation of the height and the diameter of the capacity), the thickness of the body t_w , the thickness of the vertical ribs t_p and their number n_p .

For low capacities with relatively small index of rigidity ribs and covering of zero direction, adjoining to them, could be not pressed into the middle of the capacity, but buckled outside.

Actually, the first four terms of factorization of aerodynamic coefficient (2) except for zero a_0 have additional meanings (see table 1), which corresponds to

the pressure of the covering in the middle of the capacity. Accordingly, they are enough to describe the distorted condition near zero direction.

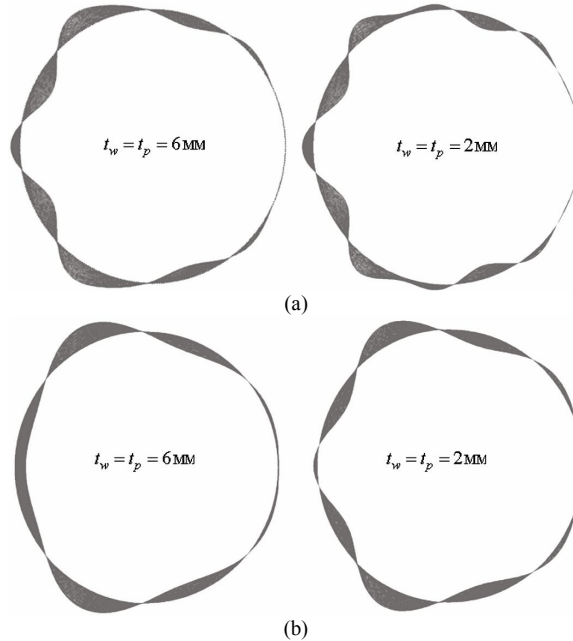


Fig. 2. Displacements of points of the capacity's body under the wind load by different elongation $\Delta_w = H_w/D_w$ and the thickness of the covering t_w and ribs t_p : (a) $\Delta_w = 1$, (б) $\Delta_w = 3$

Table 1

Values of coefficients when factorizing $C_{aer}(\varphi)$ into the series by $\cos(k\varphi)$

№	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
5	-0,380	0,326	0,686	0,478	0,040	H	H	H	H
6	-0,380	0,337	0,686	0,489	0,040	-0,114	H	H	H
7	-0,378	0,337	0,690	0,489	0,044	-0,114	-0,048	H	H
8	-0,378	0,338	0,690	0,490	0,044	-0,113	-0,048	-0,016	H
9	-0,377	0,338	0,692	0,490	0,046	-0,113	-0,046	-0,016	-0,021

But to describe in this place reciprocal form of deformation (see fig. 1 (a)), which is characterized by buckling the covering outside, we need higher terms of series (2), which are having negative values. Such characteristics of the deflected mode could not be described without them. So, when we do calculations of short capacities or constructions, which do not have sufficient local bending rigidity, the assessment of parameters of the resulting reaction must be necessarily done at such number of terms in the series m , in which not less than two of them must have negative coefficients of factorization a_k . When calculating relatively high or pretty rigid capacities the assessment of the reaction could be limited by terms

of series, which have additional coefficients of factorization a_k . Besides, this conclusion is confirmed from the point of view that the character of deformation of such capacities is smoother, than the capacities of small elongation. And there is no need in trigonometric cosine-functions of higher harmonics to describe the function, which is gradually changing (see fig. 3).

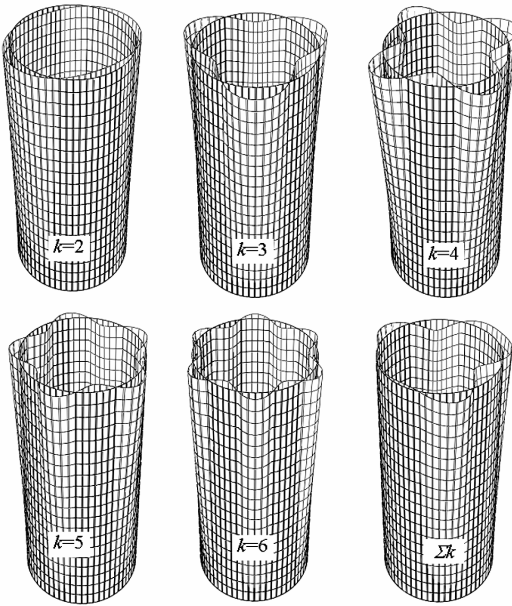


Fig. 3. The spatial character of capacities' deformation by using different harmonics of the trigonometric cosine factorization (2)

deformation is little changed under the load, when parameters of harmonica are growing.

3. When we do calculations of short capacities or constructions, which do not have sufficient local bending rigidity, the assessment of parameters of the resulting reaction must be necessarily done at such number of terms in the series m , in which not less than two of them must have negative coefficients of factorization.

4. When calculating relatively high or pretty rigid capacities the assessment of the reaction could be limited by terms of series, which have additional coefficients of factorization a_k .

It is good to denote that sensitiveness of capacity's reaction to the described above moments is rather different. The most sensitive to the number of series are capacity's displacements, which are directly participate in perception of wind loads, and efforts are less sensitive, since the character of their deformation is little changed under the load, when parameters of harmonica are growing.

Conclusions

1. The most sensitive to the number of series are capacity's displacements, which are directly participate in perception of wind loads.

2. Internal efforts in elements of the capacity are less sensitive, since the character of their

REFERENCES

1. *Makhinko A., Makhinko N.* Analysis of the deflective mode of thin-walled barrel shell. Academic journal. Industrial Machine Building, Civil Engineering, 2018. – P. 69-78.
2. *Vlasov V.Z.* Izbrannyye trudy v 3 t. - Moskva: Izdatelstvo Akademii nauk SSSR. 1962-1964. – T.1: Ocherk nauchnoy deyatel'nosti «Obschaya teoriya obolochek». Stati. – 1962. – 528 p.; T.2: Tonkostennyye uprugie sterzhni. Printsipy postroyeniya obshchey tekhnicheskoy teorii obolochek. – 1963. – 507 p.; T.3: Tonkostennyye prostanstvennyye sistemy. – 1964. – 481 p.

3. Korobov L.A., Zharkov A.F., Shernik A.O. Dymovye i ventilyatsionnyie truby vysoty 200-500 metrov, kak prostranstvennyie sooruzheniya (Smoke and ventilation pipes with a height of 200-500 meters, as spatial structures). - Moskva : KompaniyaSputnik+, 2006. - 246 p.
4. Kan S.N. Stroitel'naya mehanika obolochek (Structural mechanics of shells). - Moskva: Mashinostroenie, 1966. - 508 p.
5. Kan S.N., Byirsan K.E., Alifanova O.A. Ustoychivost obolochek (Stability of shells). - Harkov, 1970. - 153 p.
6. Kolkunov N.V. Osnovy raschyota uprugih obolochek (Fundamentals of elastic shells analysis). - Moskva: Vysshaya shkola, 1972. - 296 p.
7. Maleki S., Mehretehran A.M. 3D wind buckling analysis of long steel corrugated silos with vertical stiffeners. Engineering Failure Analysis, 2018, Vol. 90, 156-167 pp.
8. Caoa Q.S., Zhaob Y., Zhanga R. Wind induced buckling of large circular steel silos with various slenderness. Thin-Walled Structures, 2018, Vol. 130, 101-113 pp.
9. Chen L., Rotter J.M. Buckling of anchored cylindrical shells of uniform thickness under wind load, Engineering Structures. - Elsevier, 2012. - №41. - P. 199-208.
10. Rotter J.M., Sadowski A.J. Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions // Engineering Structures. - Elsevier, 2012. - №42. - P. 258-265.
11. Makhinko N.O. Rozrakhunok yemnostei z ploskym dnyshchem, yak obolonok obertannia zminnoi zhorstkosti (Calculation of tanks with flatbottom as evolution shells with variable stiffness). Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury. - Odesa: Zovnishreklamservis, 2018. - Vol.70. - P.68-74.

Стаття надійшла 10.07.2018

Махінько А.В., Махінько Н.О.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ РОЗРАХУНКУ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТАЛЕВИХ СИЛОСІВ НА ДІЮ ВІТРОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

В даній статті було досліджений вплив параметрів гармоніки несиметричного навантаження, представленого тригонометричними косинусними рядами. Аналіз базується на результатах практичних розрахунків конструкцій силосних установок з використанням теорії моменту про вплив змінного вітрового навантаження. Модель конструкції силосів схематизується у вигляді ортотропної циліндричної оболонки обертання з різною приведеною товщиною стінки в меридіональному і круговому напрямках, що дозволяє приблизно, враховуючи наявність вертикальних ребер жорсткості. Нерівномірний розподіл вітрового навантаження за периметром смістості враховувався шляхом розкладання функції аеродинамічного коефіцієнту в скінчений тригонометричний ряд. Отримані значення реакцій відбивалися в безрозмірній полярній системі координат. Чисельне дослідження та графічні схеми переміщень тіл показали, що параметри конструкції (відношення висоти та діаметра смістості, товщини корпусу та їх кількості) впливають на результат розрахунків якісно та кількісно. Для відносно високих або досить жорстких силосів оцінка реакції може бути обмежена членами ряду, які мають додатні коефіцієнти розкладання (перші чотири члени). Характер деформації таких конструкцій досить гладкий і немає потреби в тригонометричних косинусних функціях вищих гармонік для опису функції, яка поступово змінюється. Низькі силоси, які мають відносно невеликий індекс жорсткості ребер і покриттів, не могли бути притиснуті до середини смістості, а вигнуті зовні. Реципрочна форма деформації, яка характеризується вигином покриття зовні, вимагає більш високі члени ряду, які мають від'ємні значення. Отже, для силосів, які не мають достатньої локальної жорсткості на вигин, оцінка параметрів отриманої реакції повинна бути обов'язково проведена на такій кількості членів ряду, в яких не менше двох мають від'ємні коефіцієнти розкладання. Аналіз чутливості реакції силосів показав, що найбільш чутливими до числа рядів є зміщення силосу, а зусилля менш чутливі, оскільки характер їх зміни під навантаженням мало залежить від зростання параметрів гармоніки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, несиметричне навантаження, силосна смістість, ребра жорсткості, вітровий вплив, гармоніка навантаження.

Махінько А.В., Махінько Н.А.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РАСЧЕТА ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТАЛЬНЫХ СИЛОСОВ НА ДЕЙСТВИЕ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ

В данной статье было исследовано влияние параметров гармоник несимметрической нагрузки, представленной тригонометрическим косинус-рядом. Анализ основывался на результатах практических расчетов конструкций силосных емкостей согласно моментной теории на действие переменной ветровой нагрузки. Модель конструкции силоса

схематизувалась в виде ортотропной цилиндрической оболочка вращения с разной приведенной толщиной стенки в меридиональном та кільцевому напрямленні, що дозволило приблизенно учесть наличие вертикальных ребер жесткости. Неравномерное распределение ветровой нагрузки по периметру емкости учитывался путем разложения функции аэродинамического коэффициента в конечных тригонометрический ряд. Полученные результаты показали, что наиболее восприимчивыми к количеству членов ряда разложения являются перемещения корпуса емкости. Для относительно высоких силосов достаточно ограничиться только положительными значениями коэффициента разложения. Для коротких емкостей необходимо учитывать более высокие члены ряда.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, несимметрическая нагрузка, силосная емкость, ребра жесткости, ветровое воздействие, гармоника нагрузки.

УДК 624.042

Махінко А.В., Махінко Н.О. Деякі аспекти розрахунку вертикальних сталевих силосів на дію вітрових навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 46-52. – Англ.

Розглядається вплив параметрів гармоніки несиметричного навантаження представленого тригонометричним косинус-рядом на базі практичних розрахунків силосних ємностей.

Табл. 1. Іл. 3. Бібліогр. 11 назв.

UDC624.042

Makhinko A.V., Makhinko N.O. Some aspects of vertical cylindrical shells' calculation at the unsymmetrical load // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 46-52. – Eng.

The influence of asymmetric load parameters, which is represented by a trigonometric cosine-series based on design of real silos is considered.

Табл. 1. Fig. 3. Ref. 11.

УДК 624.042

Махінко А.В., Махінко Н.А. Некоторые аспекты расчета вертикальных стальных силосов на действие ветровой нагрузки // Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 102. – С. 46-52. – Англ.

Рассматривается влияние параметров гармоника несимметрической нагрузки, представленной тригонометрическим косинус-рядом на основе практических расчетов силосных емкостей.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. 11 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, с.н.с, начальник науково-технічного відділу МАХІНЬКО Антон Володимирович

Адреса робоча: 08341 Україна, Київська обл., Бориспільський р-н, с. Петропавлівське, вул. Бортницька, 1, ТОВ «Етуаль», МАХІНЬКУ Антону Володимировичу.

Адреса домашня: 08341, Київська обл., Бориспільський р-н, с. Петропавлівське, вул. Малинна, 79, МАХІНЬКУ Антону Володимировичу.

Роб. тел.: +38(044);

Мобільний тел.: +38(050) 327-27-85;

E-mail: pasargada1981@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9147-7087>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій будівництва НН ІАП НАУ МАХІНЬКО Наталія Олександрівна

Адреса робоча: 03058, Україна, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1, Національний авіаційний університет, МАХІНЬКО Наталії Олександрівні.

Адреса домашня: 08341 Київська обл., Бориспільський р-н, с. Петропавлівське, вул. Малинна, 79, МАХІНЬКО Наталії Олександрівні.

Роб. тел.: +38(044) 406-71-60;

Мобільний тел.: +38(050) 304-50-72;

E-mail: pasargada1985@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8120-6374>

УДК 624.014

STRESS-STRAIN STATE OF BEAM CORRUGATED WEB UNDER PATCH LOADING

I.Y. Semchuk,
master

T.O. Nilova,
Ph.D.

*Kyiv National University of Construction and Architecture
Povitroflotsky ave., 31, Kyiv, Ukraine 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.53-61

It's presented results of numerical investigation via the finite elements method (FEM) of stress-strain state of beam corrugated web under local load action in its plane. It's concluded that the values of local normal stresses at the level of the web and the flange connection are directly dependent on the web thickness, the flexural and the longitudinal rigidity of the flanges and virtually don't depend on the web height. A practical technique for determining the limit values of local normal stresses in the web and its stress-strain state is developed.

Keywords: corrugated web, stress-strain state, strength condition, patch loading

1. Introduction

Steel I-beams with sinusoidally corrugated webs becomes more popular in modern building practice. They are mostly used in slab's constructions of light industrial and civil buildings frameworks. Usually it is girders with span less than 30 m, and also, but rarely, it is columns.

Wide usage of elements with corrugated webs caused by its constructive simplicity and economy (small steel consumption, highly mechanized and robotic methods of its produce usage, transit simplicity, and ease of its preassembly into major units).

One of the insufficiently resolved problems, related to applying of such I-beams, is a behavior of its corrugated webs under patch loadings.

According to Eurocode 3 [1] there are three following cases, when limit state can appear in unstiffened plane web under patch loading:

- plastic strains appearance in the region of the web connection with the flange;
- web local buckling in region of patch loading action;
- general web buckling form (one or more corrugations) over the entire height.

The simplest condition for not appearance of plastic strains in the web can be written by the following formula [3]:

$$F = c_0 t_w f_y, \quad (1)$$

where c_0 – the design length of the local load application to the beam web, which is calculated by the next formula:

$$c_0 = c + k(t_f + a), \quad (2)$$

c – the length of the local load application to the beam flange; k – coefficient, which depends on deformability of element, which passes the load to the beam ($k = 2 \dots 5$); t_f – flange thickness; t_w – web thickness; a – thickness of welded seam, which joins web with flange; f_y – yield strength of web steel.

As the experimental researches are shown, this method gives reliable but inflated results (in some cases more than 200%).

If loaded element is rigid, effective patch loading distribution width should be calculated by the formula [7]:

$$l_{ef} = \eta \sqrt[3]{\frac{I_f}{t_f}}, \quad (3)$$

where η – coefficient, which for beams with plane web depends on rigidity connection of web with flange (for welded beams $\eta = 3.26$); I_f – moment of inertia of flange section.

The formula was obtained for low beams, which under local loads has local buckling at the level of web and flange connection (Broude terminology [7]). Also this formula doesn't account the length c of the local load application.

On 1999 Pasternak and Brańka [5] investigated the beam's geometrical parameters influence on load-carrying capacity under patch loading. It was set that web and flange thicknesses significantly influence on load-carrying capacity. But location of load relatively to web points (comb, zero point) doesn't have such influence.

Pasternak and Brańka proposed the formula for calculation load-carrying capacity of corrugated web under local load:

$$F = 10 \left(\frac{W}{I_{yw}/t_w} \right)^{0.4} \cdot 2 \cdot f \cdot t_w \cdot f_y, \quad (4)$$

where W – section modulus of loaded flange; I_{yw} – moment of inertia of corrugation (wave) relatively to beam axis; f – wave amplitude with the projection length m (Fig. 1).

Equation (4) doesn't account the width of load application, which causes underestimating the load-carrying capacity in case of large length (Kuchta [6]).

In numerical investigations Luo and Edlund ([8] and [9]) proved that load-carrying capacity of corrugated web significantly depends on local load distribution width l_b and beam web thickness t_w .

It should be noted that all discussed above formulae aren't sufficient scientific justified, don't account flange flexural rigidity and shear stresses between flange and web. So results with accounting of these formulae mismatch with experimental results and need correction.

The article [10] shows, that maximum matching to experimental results is achieved after usage of numerical FEM.

This paper proposes numerically analytic method for corrugated web limit state determination under patch loading, which is based on stress-strain state analysis of physico-mathematical models via FEM.

For the limit value of the local force F its value is taken, in which a local stress equal to the yield strength of the web steel f_y occurs in the beam web under the local load.

2. Research problem formulation

In this paper we consider an improved procedure for determining the web load-carrying capacity under the action of local load.

In real constructions the load passes to the beam through hot rolled or cold bended angles, which supporting length along beam length is usually $l_b = 60 \dots 80$ mm (Fig. 1, *a*). Also transversal elements can be used instead of angles. It made from sheet with width $10 \dots 15$ mm (Fig. 1, *b*). The length of transversal elements is always equal to beam flange width.

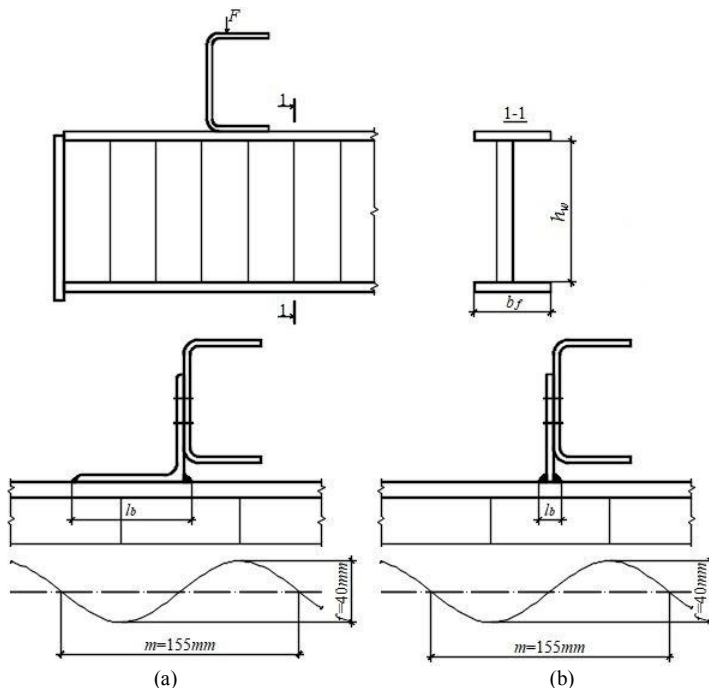


Fig. 1. The supporting nodes of purlins on the beam with corrugated web

Stress-strain state of transversally corrugated webs was analyzed in the program LIRA 10.6. All calculations were done on physico-mathematical models, which had been created according to standard corrugated profiles range of company Zeman. Used profile models WTA, WTB and WTC had such geometrical parameters:

- web thickness $t_w = 2,0; 2,5; 3,0$ mm respectively;
- web height $h_w = 500$ mm;
- flange width $b_f = 200$ mm;
- flange thickness $t_f = 8; 12; 16; 20; 25; 30; 40$ mm;
- model length $L = 1860$ mm.

Beam models were loaded by two options of load with the same resultant force ($F = 38.05$ kN) and different lengths of its action area ($l_b = 15$ mm and 77.5 mm) and width 40 mm (such width was set because of corrugation amplitude dimension f , which is 40 mm) (Fig. 2). The load was applied on beam axis in such way, that composite force was acting through change in corrugation curvature.

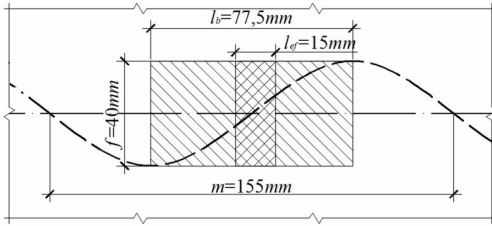


Fig. 2. Load action regions

Beams were modeled by finite elements of thin shell. Considering that beams with corrugated webs is the third class construction by its stress-strain state [1, 2], all strength analyses were done under the condition of elastic behavior of steel. The mark of the steel was E335

($f_y = 305 \text{ MPa}$).

3. Numerical results

After carrying out the necessary calculations via LIRA it was established that the height of the beam web practically did not affect the magnitude of the maximum normal stresses at the level of its connection with the flange. Web and flange thickness, and supporting length of purlin on the beam (l_b) have significant influence on the stress-strain state of beam web.

As the normal and tangential stresses distribution diagrams show (Fig. 4), maximum values are concentrated within one corrugation, and not lower than 10...20 web thicknesses from connection of web and flange (Fig. 3). It should be noted, that both diagrams (Fig. 3 and Fig. 4) based on results from calculations of beams with flange thickness 8 mm. At that the diagram on Fig. 3 displays the local load distributed on the lengths $l_b = 15 \text{ mm}$.

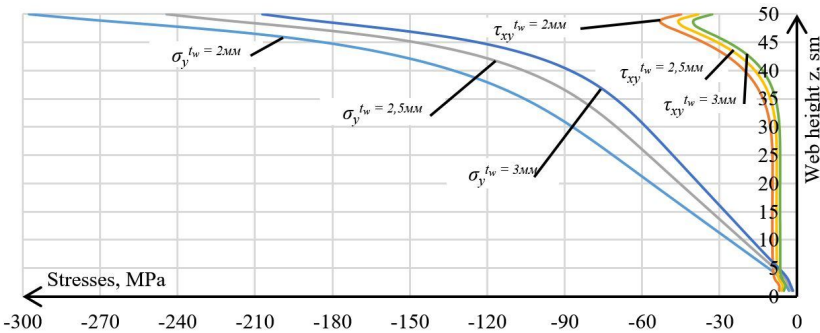


Fig. 3. The diagram of normal and tangential stresses distribution along beam web's height

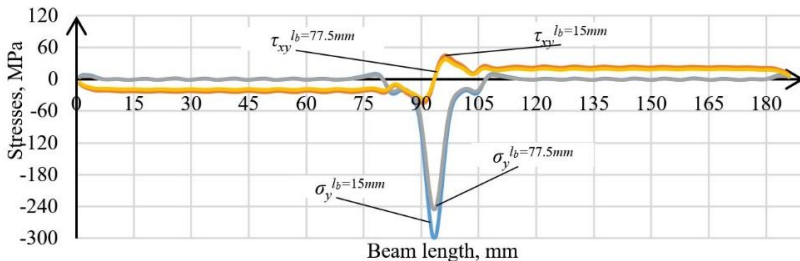


Fig. 4. The diagram of normal and tangential stresses distribution along beam length

Nowadays, design codes [1, 2] suggest to calculate local stresses under force by the next formula:

$$\sigma_{y,loc} = \frac{F}{t_w l_{ef}} \leq f_y, \quad (5)$$

where l_{ef} – design stresses distribution length taking into account web corrugating:

$$l_{ef} = (l_b + 2t_f) 2s/m;$$

l_b – the length of the local load application along the beam; s – the length of the half-wave sine curve.

The $2s/m$ ratio takes into account the increase of the corrugated web length in comparison with the flat web.

It should be noted, that the formula (5) isn't sufficient scientific justified, and doesn't account the flange flexural rigidity and shear stresses between the flange and the web. So results which were got by this formula, need correction.

More accurate values $\sigma_{y,loc}$ were got with usage of FEM via LIRA. It was done values comparison of stresses (Table 1), which were got via FEM ($\sigma_{y,loc}^{FEM}$), with those, which were calculated by formula (5) ($\sigma_{y,loc}^{(5)}$). So it was set, that these stresses were changed by different rules (Table 1). If the purlin supporting length is insignificant ($l_b = 15$ mm), $\sigma_{y,loc}^{FEM}$ always are much smaller than $\sigma_{y,loc}^{(5)}$. If to increase contribution length ($l_b = 77.5$ mm) and flange thickness is small ($t_f = 8 \dots 12$ mm), $\sigma_{y,loc}^{FEM}$ are higher than $\sigma_{y,loc}^{(5)}$. But with flange thickness increasing $\sigma_{y,loc}^{FEM}$ is becoming smaller than $\sigma_{y,loc}^{(5)}$.

To simplify the calculations, approximate values of normal stresses $\sigma_{y,loc}$ can be found with the diagram (Fig. 5) depending on the web thickness t_w and the flange thickness t_f when the purlin supporting lengths $l_b = 15$ mm and $l_b = 77.5$ mm.

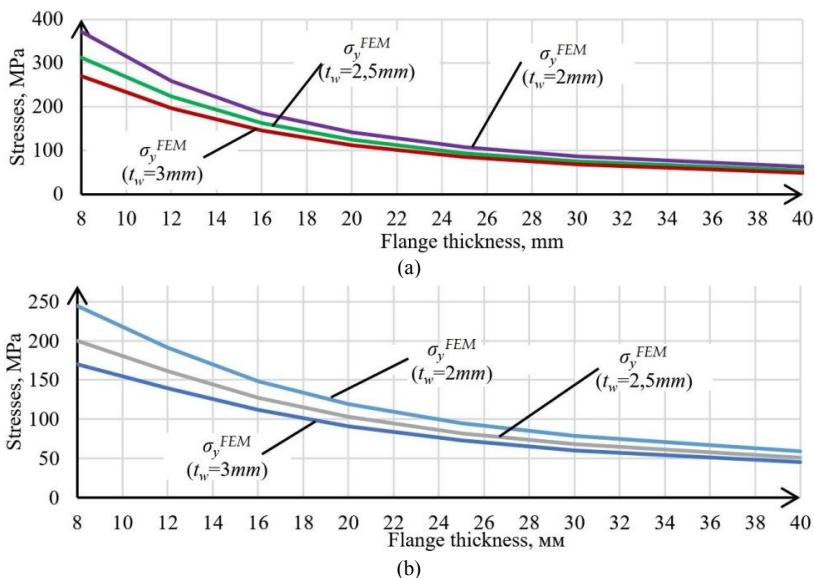


Fig. 5. Dependence of $\sigma_{y,loc}$ on t_w and t_f when $l_b = 15$ mm (a) and $l_b = 77.5$ mm (b)

Table 1

Local stress ($\sigma_{y,loc}^{FEM}$ and $\sigma_{y,loc}^{(5)}$) values comparison

Profiles mark	Profiles mark		t_f, mm													
	t_w, mm	l_b, mm	8		12		16		20		25		30		40	
			FEM	(5)	FEM	(5)	FEM	(5)	FEM	(5)	FEM	(5)	FEM	(5)	FEM	(5)
WTA	2	15	372,59	536,68	258,78	437,86	186,27	369,77	141,73	320,01	107,90	273,93	86,94	239,45	62,82	191,29
		77,5	243,99	180,99	190,84	168,19	148,48	157,08	119,19	147,35	94,96	136,75	78,86	127,58	59,05	112,49
WTB	2,5	15	313,0	429,35	223,25	350,29	162,94	295,82	124,45	256,01	94,62	219,14	75,99	191,56	54,59	153,03
		77,5	200,3	144,79	161,10	134,55	127,33	125,66	102,83	117,88	82,05	109,40	68,09	102,07	50,89	89,99
WTC	3	15	270,70	357,79	197,05	291,91	145,63	246,51	111,77	213,34	84,99	182,62	68,12	159,63	48,72	127,53
		77,5	169,80	120,66	139,62	112,13	111,93	104,72	90,98	98,23	72,77	91,17	60,39	85,05	45,08	75,00

In this paper while using the formula (5) it is proposed to calculate the design length l_{ef} taking into account flange flexural rigidity I_f and web thickness t_w by the formula (3) with introduction of new refined coefficient ψ instead of the coefficient η . The procedure for determining the value of this coefficient besides flexural rigidity of the flange takes into account the deformability level of its connection with the corrugated web. For corrugated beams the coefficient ψ should be taken from Table 2 which is the basis for its determination for any geometric parameters of the beams according to the company Zeman range.

Table 2

Coefficient ψ values for beams with flange width $b_f=200 mm$

Profiles mark	Profiles mark		t_f, mm							
	t_w, mm	l_b, mm	8	12	16	20	25	30	40	
			WT A	2	15,5	31,48	30,21	31,48	33,10	34,78
	77,5	48,07	40,97		39,50	39,36	39,52	39,66	39,72	
WT B	2,5	15,5	32,29	30,18	31,02	32,48	34,19	35,47	37,02	
		77,5	50,47	41,82	39,69	39,32	39,42	39,58	39,72	
WT C	3	15,5	33,07	30,28	30,73	32,03	33,70	35,04	36,74	
		77,5	52,71	42,73	39,98	39,35	39,36	39,52	39,71	
I_f			0,85	2,88	6,83	13,33	26,04	45	106,67	

The given coefficients ψ are calculated by the formula:

$$\psi = \frac{F}{\sigma_{y,loc} t_w \sqrt[3]{t_f / t_w}} = \frac{F}{\sigma_{y,loc} \sqrt[3]{t_w^2 I_f}}. \quad (6)$$

Also obtained values ψ account the load action length along the beam flange $l_b = 15$ mm or $l_b = 77.5$ mm (Table 2). When web thickness (t_w) is given, ψ values depend only on flange moment of inertia ($I_f = b_f t_f^3 / 12$). When flange width or thickness is different to table values, the ψ values should be calculated with using of the last row in Table 2 and linear interpolation.

If the flange thickness t_f differs from the values given in Table 2 or the value $15 \text{ mm} \leq l_b \leq 77.5 \text{ mm}$ then linear interpolation method should be used to determine the coefficient ψ .

It should be noted, that the web has composite stress-strain state at the level of connection with the flange. Such condition caused by deformation continuity effect. The appeared stresses ($\sigma_{x,loc}$ and $\tau_{xy,loc}$) could be calculated as a component of $\sigma_{y,loc}$. At that for practical calculations it can be taken the average values $\sigma_x = (0.21 \div 0.25)\sigma_y$ and $\tau_{xy} = (0.2 \div 0.3)\sigma_y$.

As the Huber-Mises-Hencky theory says, the condition of steel elastic behavior is verified by formula:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_y^2 + (\sigma_x + \sigma_{x,loc})^2 - \sigma_y (\sigma_x + \sigma_{x,loc}) + 3(\tau_g + \tau_{xy,loc})^2} \leq \beta f_y. \quad (7)$$

Tangential stresses τ_{xy} should be calculated as sum $\tau_{xy} = \tau_Q + \tau_{xy,loc}$, where τ_Q is calculated from transverse force in the section. Taking in accounting that plastic strains are generated in the web on the small length under local force, then it is suggested in case of compressed flange take coefficient $\beta = 1.15$, and in case of tensed flange take $\beta = 1.30$. In addition, normal stresses should not be higher than yield strength of steel f_y .

For practical calculations the value of the limiting force F under the condition of strength is recommended to be determined by the formula:

$$F = t_w l_{ef} f_y, \quad (8)$$

where l_{ef} should be taken using the coefficient ψ (Table 2).

Conclusions

It is proved that stress-strain state of beam corrugated web under the action of the local patch loading should be determined taking into account the distribution length of the local load, the web thickness, the flange rigidity and the behavior of its connection with the web using the FEM.

A scientifically grounded technique for determining stress-strain state of beam corrugated web is developed with sufficient accuracy. This procedure presented in tabular form and allows determining the limit value of local patch loading provided prevention of plastic strains.

REFERENCES

1. Eurocode No. 3 Design of Steel Structures. Part 1.1. General rules and rules for buildings (European Prestandard ENV-1993-1-1).
2. Eurocode No. 3, Design of Steel Structures. Part 1.5. Plated structural elements (EN 1993-1-5, 2008).
3. *Stokola W.*, Wellstegträger. Herstellung und Anwendung von Trägern mit profiliertem Steg. — Stahlbau 9/1997. — P. 596 — 605.

4. *Ramberger G.*, Gutachten über die Berechnung von Geschweissten I-Trägern Mit Stegen Aus Gewellten Blechen. — O. Univ., Wien 1989 — not published.
5. *Pasternak H., Braňka P.*, Tragverhalten von Wellstegträgern unter lokaler Lasteinleitung. — Bauingenieur 5/1999. — P. 219 — 224.
6. *Kuchta K.R.*, Nośność i Sztywność Blachownic o Falistych Środnikach. — Politechnika Krakowska. — Kraków 2004.
7. *Broude B.M.*, Распределение сосредоточенного давления в металлических балках. (Distribution of concentrated pressure in metal beams) — Stroyizdat, Moskva — Leningrad 1950.
8. *Luo R., Edlund B.*, Strength of Plate Girders with Trapezoidally Corrugated Webs in Shear or under Patch Loading — Proceedings of Nordic Steel Construction Conference, Malmö, — 1995, — P. 79 — 86.
9. *Luo R. and Edlund B.*, Shear Capacity of Plate Girders with Trapezoidally Corrugated Webs. — Thin-Webbed Structures, — 1996, Vol. 26, No. 1, — P. 19 — 44.
10. *Kuchta K.R.*, Design of corrugated webs under patch load. — Advanced Steel Construction, — 2007, — Vol. 3, — No. 4. — P. 737 — 751. <https://doi.org/10.18057/IJASC.2007.3.4.3>

Стаття надійшла до редакції 12.10.2018 р.

Семчук І.Ю., Нілова Т.О.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ГОФРОВАНОЇ СТІНКИ БАЛКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Згідно сучасним нормам проектування, гофровані стінки зварних балок під дією локальних навантажень, прикладених до поясів в площині стінки, повинні перевірятися на міцність за умовою пружної роботи сталі. Але в наш час в нормах проектування науково обгрунтована методика такого розрахунку відсутня.

У роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод визначення граничного стану гофрованої стінки при локальному навантаженні, який базується на аналізі за методом МСЕ напружено-деформованого стану фізико-математичних моделей, створених відповідно до сортаменту гофрованих профілів компанії Zeman. При аналізі міцності балки моделювалися СЕ тонкої оболонки за умовами пружної роботи сталі. Встановлено, що висота стінки практично не впливає на значення нормальних напружень в рівні її з'єднання з поясом. Суттєвий вплив на величину локальних напружень надають товщина стінки і довжина розподілу локального навантаження.

Розроблено основоположну таблицю, яка дозволяє знайти всі необхідні дані для визначення максимального значення локального навантаження за умовою пружної роботи сталі. У випадках, коли товщина поясу або довжина розподілу локального навантаження відрізняється від табличних значень, необхідно використовувати лінійну інтерполяцію.

Враховуючи, що в області спряження стінки з поясом діють одночасно локальні тангенціальні і нормальні напруження, міцність стінки слід перевіряти за критерієм Хубера-Мізеса-Хенкі.

Ключові слова: гофрована стінка, напружено-деформований стан, умова міцності, локальне навантаження.

Semchuk I.Y., Nilova T.O.

STRESS-STRAIN STATE OF BEAM CORRUGATED WEB UNDER PATCH LOADING

One of the insufficiently resolved problems related to the use of steel I-beams with sinusoidally corrugated webs that are becoming more popular in modern building practice is a behavior of its webs under patch loadings.

According to modern design codes corrugated webs of welded beams under patch loading action via one of the flanges in the web plane should be checked for strength under the condition of elastic behavior of steel. But nowadays standard scientific justified technique for such analyses is absent.

This paper proposes numerically analytic method for corrugated web limit state determination under patch loading, which is based on stress-strain state analysis via FEM of physico-mathematical models created according to standard corrugated profiles range of company Zeman.

In the strength analysis the beams were modeled by finite elements of thin shell under the condition of elastic behavior of steel. It's established that the web height practically don't have an effect on the values of normal stresses at the level of its connection with the flange. The web thickness and the distribution length of the patch loading exert the main impact on the value of local stresses.

A generic table that allows finding all necessary data to determine the maximum value of local patch loading under the condition of steel elastic behavior was developed. In the cases when flange thickness or distribution length of the patch loading is different to the table values it is necessary to use the linear interpolation method.

Considering that in the area of local stresses the tangential stresses act simultaneously with the normal stresses, the web strength is proposed to be checked by the Huber-Mises-Hencky criterion.

The application of the developed technique makes it possible to determine with a given accuracy the value of local stresses in the web and, if necessary, to correct its thickness or the flange thickness. This procedure allows refining the required web thickness when patch local loading affects it and, thus, reduces consumption of steel.

Keywords: corrugated web, stress-strain state, strength condition, patch loading

Семчук І.Ю., Нілова Т.А.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОФРИРОВАННОЙ СТЕНКИ БАЛКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Приведены результаты численного исследования методом конечных элементов (МКЭ) напряженного состояния гофрированной стенки балки при действии локальной нагрузки в её площади. Установлено, что величина локальных нормальных напряжений на уровне соединения стенки с поясом непосредственно зависит от толщины стенки, изгибной и продольной жесткости поясов и практически не зависит от высоты стенки. Разработана практическая методика определения величины локальных нормальных напряжений в стенке и ее предельного состояния.

Ключевые слова: гофрированная стенка, напряженно-деформированное состояние, условие прочности, локальное нагружение.

УДК 624.014

Семчук І.Ю., Нілова Т.О. **Напружено-деформований стан гофрованої стінки балки при локальному навантаженні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 53-61.

Наведені результати чисельного дослідження за методом скінчених елементів напруженого стану гофрованої стінки балки при дії локального навантажування в її площині. Розроблена практична методика визначення величини локальних нормальних напружень в стінці і її граничного стану.

Табл. 2. Іл. 5. Бібліогр. 10 назв.

UDC 624.014

Semchuk I.Y., Nilova T.O. **Stress-strain state of beam corrugated web under patch loading** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 53-61.

The results of a numerical study by the finite element method of the stressed state of a corrugated beam wall under the action of a local load in its plane are presented. A practical method was developed for determining the magnitude of local normal stresses in a wall and its limiting state.

Tabl. 2. Fig. 5. Ref. 10.

УДК 624.014

Семчук І.Ю., Нілова Т.А. **Напряженно-деформированное состояние гофрированной стенки балки при локальном нагружении** // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вип. 102. - С. 53-61.

Приведены результаты численного исследования методом конечных элементов напряженного состояния гофрированной стенки балки при действии локальной нагрузки в ее плоскости. Разработана практическая методика определения величины локальных нормальных напряжений в стенке и ее предельного состояния.

Табл. 2. Ил. 5. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): магістр Семчук Ігор Юрійович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра металевих і дерев'яних конструкцій, Семчуку Ігору Юрійовичу.

Робочий тел.: +38(044) 248-31-17;

E-mail: semchuk7@ukr.net

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук,

доцент кафедри металевих і дерев'яних конструкцій КНУБА Нілова Тетяна Олексіївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра металевих і дерев'яних конструкцій, Ніловій Тетяні Олексіївні.

Адреса домашня: 03087, Україна, Україна, м. Київ, вул. Ереванська б.8-а, кв.54.

Робочий тел.: +38(044) 248-31-17;

Мобільний тел.: +38(068) 128-30-62.

E-mail: tatic70@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-9282-8136>

UDC 69.07

PROVIDING OF THE VITALITY OF STEEL FRAMES OF HIGH-RISE BUILDINGS UNDER ACTION OF FIRE**M.K. Daurov,**
MSc.**A.S. Bilyk,**
PhD.*Kyiv National University of construction ana Architecture, Kyiv
Povitroflotsky ave., 31, Kyiv, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.62-68

High-rise buildings are sensitive to progressive collapse – when the local destruction leads to the collapse of the entire building or disproportionately large part of it. Current Ukrainian norms are requiring the vitality of high-rise buildings under the action of unidentified factors and, since 2017, - under the action of fire, which is considered in this article.

Key words: high-rise buildings, progressive collapse, threat, vitality, column, fire, steel structures.

Actuality. The safety issue today is very relevant in various spheres of human life, including the sphere of exploitation of building structures. The development of society from the second half of the XX century has led to the creation of technical and organizational-technical systems in a global scale that provides activity in the political, economic, military, environmental and other areas.

The development of such systems increases their sensitivity to external actions as spontaneous - earthquakes, floods, solar activity, weather disasters, man-made disasters, and purposeful nature - hostilities, terrorism, etc.

Recently, the issue of the stability of high-rise buildings (with the height 73.5 m and higher) [1] to the so-called “progressive collapse” - the proliferation of local destruction, which leads to the collapse of the entire building or disproportionately large part of it.

Analysis of recent research and publications. In national norms [1], [2] there are no formalized methods of calculating buildings for vitality, there are only basic recommendations. In [1] it is recommended to calculate vitality with the simulation of a local destruction by removing one first floor column from the calculation scheme. However, in the simulation of local destruction in this way does not take into account the factor that causes the removal of the column from work and extraction parameters.

In [2] is a list of events that should be taken into account in a vitality calculation. The method for calculating vitality with a specific threat in national norms is not given. USA normative documents such as UFC 4-023-03 [9] set out the main provisions for the calculation of progressive collapse and methods of protection against it, as well as features and examples separately for metal, reinforced concrete, stone, wood, cold-rolled steel constructions. A European norm [3] provides methods for calculating the vitality due to impact and internal explosion. In the review of selected normative documents, methods or recommendations regarding the calculation of vitality during the fire were not detected.

In scientific works [10-12] studied modern methods of progressive collapse simulation of building and structures and methods of analysis of steel frames high-rise buildings at single vitality.

A large number of scientific studies [13-19] is devoted to the research of the progressive collapse of steel frame in the removal of the first-floor column from the design scheme of the building. Also, in a many studies [21, 22] attention was paid to the work of the beam-to-column connection at the removal of the columns from the design scheme and the effect of the work of the connection on the progressive collapse of the floor plate. This doesn't take into account the factor that caused the local destruction of the column. In studies [20] the removal of a column is presented as a consequence of an explosion. But this approach doesn't take into account the process of removing the column from the work of the calculation scheme.

Studies [23-27] consider fire as a specific factor that can lead to the progressive collapse of a steel frame and simulating the effect of a fire on frame elements. However, the real mode of fire and then the cooling stage, which depend on the parameters of the fire compartment, and therefore the planning decisions of the building, as well as the fire protection of steel structures, are not taken into account. Also, there aren't ways to prevent progressive collapse or prevent local destruction.

In studies [28] it is proved that in the event of a fire, the beam is more exposed than the column, which is still working in the calculation scheme. From this it follows that by removing the first-floor column it is impossible to simulate local destruction as a result of a fire.

The scientific work [29] is devoted to buckling of the flat form of bending of I-beams. The influence of heating and temperature loads on structural elements is given in publications [30-32].

Unsolved part of the problem. If the impact from a motor vehicle or an explosion can be simulated by removing the first-floor column, then the issue of simulating the effects of a fire with taking into account the real fire curves and fire proofing of steel structures is open to examination.

Tasks of the research. In this study the main task is to modeling the effect of a fire as a specific threat, and determining the possibility of designing a steel frame of a high-rise building in order to avoid the local destruction of elements of the design scheme.

Main material. As the initial model, the steel rigid frame of a high-rise building with a height of 75,6 m (18 floors) and 45x45m in size with a central core of rigidity in the plan of 15x15m, a 7,5m column in both directions, was adopted (Fig. 1). The structure of the building is designed in accordance with the building codes and regulatory loads. Steel for the bearing structures adopted S345.

Six expertly most likely and worst scenarios for the emergence and spread of fires in the building on the ground floor were considered in the plan (Fig. 2).

It was simplified that the plans on all floors are identical. The fire scenarios were expertly reviewed on the 1st, 4th, 7th, 11th, 15th floors (on each floor were modeled all 6 scenarios).

For each scenario, the parametric fire temperature-to-time ratios were determined according to Eurocode 1 [4]. Fire resistance of unprotected steel structures was determined according to Eurocode 3 [5]. At critical temperatures and fire protection of steel structures was designed in accordance with the Guide

to EN 1993-1-2 [6], providing the fire resistance R180 [1] (as EN 1993-1-2:2005 [5] regulates a differentiated approach - taking into account the fire resistance of unprotected steel structures at projection of fire protection). The chosen fire-protection means - cement-vermiculite plates.

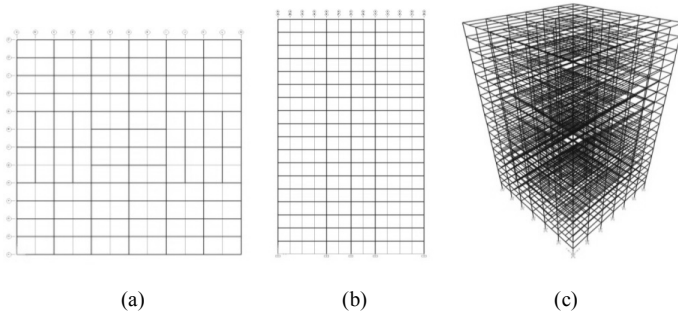


Fig. 1. General view of the calculation model: (a) the plan of the building; (b) cross-section; (c) 3D view

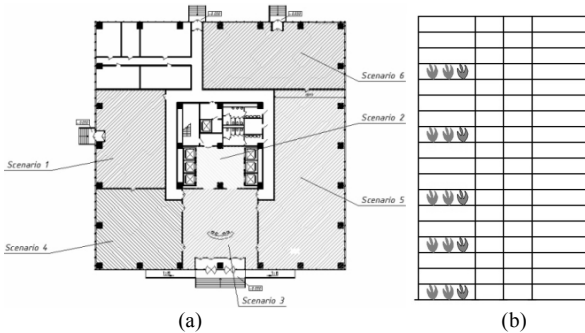


Fig. 2. Scenarios for the emergence and spread of the fire: (a) – within the floor, (b) – within a height of the building

The simulation of the fire effect on steel frame structures was carried out using the temperature loads, the values of which were equal to the steel temperatures of the protected steel structures, which were determined according to Eurocode 3 [5] for each scenario. After determining the values of temperature loads for each fire scenario, it was found that the strength characteristics of steel in the structural elements exposed to the fire are almost unchanged (with a maximum temperature load of 120,4 °C the value of the proportional limit is reduced by 3,9% and the value of the slope of the linear elastic range by 2%) when providing fireproof materials with a fire resistance limit R180.

Emergency loading is assumed to be dead and live with the value of load reliability factors equal to units [7], and the responsibility reliability factor $K_{ff}=1,05$, which corresponds to the CC3 consequences class in the emergency calculation situation when verifying the elements for the ultimate limit state [7]. Factor of combination of loads are accepted as for an emergency calculation situation [7]. Emergency load in this case is the temperature load.

After calculating the effect of the fire, it was found that for any scenario, the strength of all structural elements of the framework is not ensured. It was

decided to check the possibility of designing the frame in such way as to prevent local destruction in the calculation, and in a case of the absence of such possibility - to analyze the local destruction and allow it to be calculated.

The first strategy of vitality was chosen to increase the areas of the frame elements cross-sections. All sections and stresses determination was completed using SAP 2000.20. The calculation of steel structures was completed according to EN 1993-1-1:2005 [8].

As a result of the calculation, the weight of steel beams increased by 83.1% after the increase of cross sections areas, which is explained by the appearance of longitudinal forces in the beams, whose values reach - 3100kN. The weight of the steel columns has not increased. Total mass of steel frame increased by 49,2%.

In order to reduce the weight of the frame, two more strategies were considered.

The second strategy for providing vitality was to ensure the composite work of steel beams with in-situ reinforced concrete slab on a profiled metal sheet, using stud-bolts. The weight of the steel columns has not increased. But the weight of steel beams increased by 129,4%, which is explained by the appearance of significant longitudinal forces in the beams, the values of which reach - 10225kN, which is much more than without the composite work of beams with a reinforced concrete slab. The total mass of the steel frame increased by 76,7%, which is more than with the increase of cross-sections.

The third strategy for providing vitality was to increase the thickness of the fireproof material in beams by 3 mm in order to reduce the weight of the frame compared to the variant with the increase in cross-section areas. At the same time, the weight of steel beams increased by 71,7%, which is 11,3% less than with the strategy of increasing cross-sections. The weight of the steel columns has not increased. The total weight of the steel frame was increased by 42,6%, which is 6,6% less than in the strategy with increasing cross sections, and by 34,1% less than in the strategy to ensure the composite work of steel beams with reinforced concrete slab. The economic costs of the considered strategies were compared in a Tab. 1.

Conclusions. The most economical strategy for providing vitality of a frame under action of fire is an increase in the thickness of the fireproof material in the beams.

Fire protection, which provides the fire resistance R180 in steel constructions of high-rise buildings, minimizes the temperature load and allows calculating the frame of the building taking into account the fire. It was concluded that the steel frame of a high-rise building could be designed in such a way as to prevent the local destruction of elements of the design scheme due to the fire.

Table 1
Comparison of strategies for providing vitality of a frame under action of fire

Strategy №	Measures	Increasing the metal consumption, %	Extracash expense, mil. eur.*		
			The cost of metal	Costs or fire protection	Of all
1	Increasing cross sections	49,2	1,78	-	1,78
2	Ensuring the joint work of steel beams with a reinforced concrete slab	76,7	2,78	-	2,78
3	Increasing the thickness of the fireproof material in beams by 3 mm	42,9	1,54	0,036	1,576

* prices are provided by commercial mid-market experts for the city of Kyiv/7-2018

The best strategy for providing vitality under action of fire in this study was recognized increase in the thickness of fire protection. It was concluded that when calculating steel frames for vitality under action of fire, it is necessary to consider not only constructive measures, but also fire prevention measures.

REFERENCES

1. Derzhavni budivelni normy. Budynki i sporudy. Proektuvannya vysotnykh zhytlovykh i hromadskykh budynkiv (State building standards. Building sandstructures. Design of high-rise residential and public buildings): DBN V.2.2-24:2009. – (Valid from 2009-09-01). – K.: Minrehionbud Ukrainy (Kyiv: Ministry of Regional Development, Construction and Housing and Communal Services of Ukraine), 2009. – 133 p. – (Derzhavni budivelni normy). (in Ukrainian)
2. DBN V.1.2-14:20XX (project, second edition). Zahalni pryntsypy zabezpechennya nadiynosti ta konstruktivnoyi bezpeky budivel, sporud, budivelykh konstruktivnykh ta osnov (General principles of maintenance of reliability and constructive safety of buildings, structures, building constructions and bases). – K.: Minrehionbud Ukrainy (Kyiv: Ministry of Regional Development, Construction and Housing and Communal Services of Ukraine), 2017. – 81 p. – (Derzhavni budivelni normy). (in Ukrainian)
3. EN 1991-1-7. Eurocode 1: Actions on structures - Part 4: Part 1-7: General actions – Accidental actions: EN 1991-1. - Brussels: Management Centre, 2006. - 69 p. - (European Standard).
4. EN 1991-1-2:2002. Eurocode 1: Actions on structures –Part 1-2: General rules – Actions on structures exposed to fire: EN 1991-1. - Brussels: Management Centre, 2002. - 61 p. - (European Standard).
5. EN 1993-1-2:2005. Eurocode 3: Design of steel structures –Part 1-2: General rules – Structural fire design: EN 1991-1. - Brussels: Management Centre, 2005. - 81 p. - (European Standard).
6. Calculation Of Steel Constructions For Fire Resistance In Accordance With The Eurocode 3. Practical guide to DSTU-NEN 1993-1-2: 2010/ K.V. Kalafat // Ukrainian Center for Steel Construction. – 2016. – 83p.
7. EN 1990:2002. Eurocode 0: Basis of structural design: EN 1990. - Brussels: Management Centre, 2002. - 119 p. - (European Standard).
8. EN 1993-1-1:2005. Eurocode 3: Design of steel structures –Part 1-1: General rules and rules for buildings: EN 1991-1. - Brussels: Management Centre, 2005. - 93 p. - (European Standard).
9. UFC 4-023-03. United Facilities Criteria (UFC). «Design of Buildings to Resist Progressive Collapse». Department of Defense USA. 2009.
10. Bilyk A.S., Kovalenko A.I. Porivnyannya metodiv rozrakhunku metalevykh karkasiv vysotnykh budivel na odynychnu zhyvuchist (Comparison of methods of analysis of steel frames high-rise buildings at single vitality) // Zbirnyk naukovykh prats Ukrayinskoho instytutu stalevykh konstruktivnykh imeni V.M. Shymanovskoho. – Vypusk 16. – Kyiv, Vydavnytstvo «Stal», 2015. – S. 30-40. (inUkrainian)
11. Bilyk A.S., Kovalenko A.I. Suchasni metody modelyuvannya prohresyuyuchoho runuvannya budivel I sporud (Modern methods of progressive collapse simulation of building and structures) // Stroytelstvo. Materyalovedenye. Mashynostroenye. Seryya: Sozdanye vysokotekhnolohycheskykh ékokompleksiv v Ukrainy na osnove kontseptsyy sbalansyrovannoho (ustoychyvoho) rozvytytya. - Dn-vsk., HVUZ«PHASA», 2016. - Vyp. 87. - S. 35-41. (inUkrainian)
12. Bilyk A.S., Kovalenko A.I. Dynamichni zusylyla v kolonakh stalevykh karkasiv bahatopoverkhovykh budivel pry rozrakhunku na odynychnu zhyvuchist (Dynamic forces in the columns of high-rise steel frame buildings at single vitality analysis) // Resursoekonomni materialy, konstruktivni, budivli ta sporudy. – Rivne, NUVHP, 2016. - Vyp. 32. - S. 304-309. (inUkrainian)
13. Rinsha C, Biju Mathew. Progressive collapse analysis of steel frame structures // International Research Journal of Engineering and Technology. - Volume 4 – Tamilnadu: IRJET, 2017. – p. 1653-1655.
14. S. Jayarajan, J.Y. Richard Liew, C.G. Koh. Progressive Collapse Mitigation Approaches for Steel-Concrete Composite Buildings // International Journal of Steel Structures. – Basel: KSSC and Springer, 2015. – Volume 15, Issue 1. - p. 175-191.
15. Ru Liu, Buick Davison, Andrew Tyas. A study of progressive collapse in multi-storey steel frames // Structures Congress. – Reston: ACSE, 2005. – p. 1-9.
16. B.A. Izzuddin, A.G. Vlassis, A.Y. Elghazouli, D.A. Nethercot. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss — Part I: Simplified assessment framework // Engineering Structures. - London: Elsevier, 2008. – Volume 30. – p. 1308-1318.
17. A.G. Vlassis, B.A. Izzuddin, A.Y. Elghazouli, D.A. Nethercot. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss—Part II: Application// Engineering Structures. - London: Elsevier, 2008. – Volume 34. – p. 1424-1438.
18. A.G. Vlassis, B.A. Izzuddin, A.Y. Elghazouli, D.A. Nethercot. Progressive collapse of multi-storey buildings due to failed floor impact // Engineering Structures. - London: Elsevier, 2008. – Volume 34. - p. 1522-1534.

19. *M. Krishna Chaitanya*. Progressive collapse of structures// International Journal of Mechanical Civil and Control Engineering. – Vengatpathy: International Institute of Scientific Research and technology, 2015. – p. 23-29.
20. North American steel contraction conference / Design of Steel Structures for Blast-Related Progressive Collapse Resistance. *Ronald Hamburger, S.E., Andrew Whittaker, S.E.*. - Modern Steel Construction, 2004. – p. 1-4.
21. *Yixin Liu, Lei Xu, Donald E. Grierson*. Influence of Semi-Rigid Connections and Local Joint Damage on Progressive Collapse of Steel Frameworks // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. – Ontario: Blackwell Publishing Inc., 2010. – p. 184-204.
22. Conference: XXIV Giornata italiana della Costruzione in Acciaio/ Ultimate Capacity Of Beam-To-Column Connections Under Bending And Axial Stresses. *Florea Dinu, Dan Dubina, Ioan Mircea Marginean, Ioan Petran*. – Torino: Research Gate, 2013. – p. 1-9.
23. Technical Contribution to the III International Seminar on The Use of Steel Structures in Civil Construction / The Ultimate Behaviour Of Composite Frames In Fire Conditions. *Zhaohui Huang, Ian W. Burgess, Roger J. Plank*. - Belo Horizonte: MG, Brazil, 2000. – p. 1-10.
24. *Ruirui Sun, Zhaohui Huang, Ian Burgess*. Progressive Collapse Analysis of Steel Structures under Fire Conditions // Engineering Structures. - London: Elsevier, 2012. – Volume 34. – p. 400-413.
25. *Vidyadhar Angadi, Dr. S. B. Vanakudre*. Fire Induced Progressive Collapse of Multi-storied Steel Structure // International Research Journal of Engineering and Technology. – Tamilnadu, IRJET, 2017. - Volume 4. - p. 1317-1323.
26. *Anil Agarwala, Amit H. Varma*. Fire induced progressive collapse of steel building structures: The role of interior gravity columns // Engineering Structures. - London: Elsevier, 2014. – Volume 58. – p. 129-140.
27. *Tavakoli, H.R., Kiakojouri F.* Threat-Independent Column Removal and Fire-Induced Progressive Collapse: Numerical Study and Comparison // Civil Engineering Infrastructures Journal. – Tehran: University of Tehran, 2015. - Volume 48 (1). - p. 121-131.
28. *Sun, R., Burgess, I.W., Huang, Z. And Dong, G.* Progressive failure modeling and ductility demand of steel beam-to-column connections in fire // Engineering Structures. – London: Elsevier, 2015. - Volume 89. - p. 66-78.
29. *Bilyk S.I.* Stiykist ploskoyi formy zhynu konsolnoyi dvotavrovoyi balky zi zminnoyu vysotoyu stinky za metodom Rittsa (Buckling of flatformbending of cantilever I-beam with variable height of a web by the method of Ritz) // Opirmaterialiv i teoriyasporud. – Kyiv, KNUBA, 2008. - Vyp. 82. - S. 146-153. (in Ukrainian)
30. *Kryvenko O.P.* Vplyv nahrivu na stiykist i vlasni kolyvannya sferychnoyi paneli pry zmini umov kombinovanoho zakriplennya konturu (The effect of heating on the stability and natural vibrations of a spherical panel with the changing combined fixation of the boundary) // Opir materialiv i teoriya sporud. – Kyiv, KNUBA, 2015. - Vyp. 96. - s. 48-65. (in Ukrainian)
31. *Shkryl O.O.* Vyznachennya koefitsiyentiv intensyvnosti napruzhen v dvovymirnykh tilakh pry temperaturnomu navantazhenni (Definition stress intensity coefficient two-dimensional bodies under thermal load) // Opirmaterialiv i teoriyasporud. - Kyiv, KNUBA, 2014. - Vyp. 93. - s. 128-136. (in Ukrainian)
32. *Kryvenko O.P.* Vplyv poperednoho nahrivu ta zminy umov kombinovanoho zakriplennya konturu na stiykist i vlasni kolyvannya polohykh paneley pry diyi tysku (The effect of preliminary heating and combined fixation of the boundary on the stability and natural vibrations of panels under action of pressure) // Opirmaterialiv i teoriyasporud. - Kyiv, KNUBA, 2016. - Vyp. 97. - s. 107-120. (in Ukrainian)

Стаття надійшла до редакції 31.10.2018 р.

Дауров М.К., Білик А.С.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЖИВУЧОСТІ СТАЛЕВИХ КАРКАСІВ ВИСОТНИХ БУДІВЕЛЬ ПРИ ДІЇ ПОЖЕЖІ

Висотні будівлі чутливі до прогресуючого руйнування – поширення локального руйнування, що призводить до руйнування всієї будівлі або непропорційно великої її частини. Чинні вітчизняні норми вимагають забезпечення живучості для висотних будівель при дії невстановлених факторів і, віднедавна, - при дії пожежі, що розглядається в даній статті.

В даній статті змодельовано вплив пожежі як конкретного фактору, що може спричинити прогресуюче руйнування, на елементи сталевих каркасів висотної будівлі. Було розглянуто різні сценарії виникнення пожежі на різних поверхах та в різних протипожежних відсіках на поверсі. При моделюванні було враховано: вогнезахист сталевих конструкцій та параметричні температурно-часові залежності для різних протипожежних відсіків. Дію пожежі було змодельовано через температурні навантаження, виконано перевірку міцності перерізів сталевих каркасів. Після розрахунку було визначено характер змін міцнісних характеристик сталі при пожежі і проаналізовано зміну внутрішніх зусиль в елементах каркасу. Перевірена

можливість та доцільність запроєктувати сталевий каркас висотної будівлі таким чином, щоб не допускати локальне руйнування при дії пожежі. Було розглянуто три стратегії забезпечення опору елементів сталевих каркасів дії пожежі. Такими стратегіями були: збільшення перерізів елементів сталевих каркасів, забезпечення сумісної роботи сталевих балок із залізобетонною плитою перекриття та збільшення товщини вогнезахисного матеріалу в балках. Дані стратегії були порівняні з точки зору металосмістості та економічних витрат і визначена найбільш економічна стратегія. Для найбільш економічної стратегії було виконано розрахунок із урахуванням фізичної та геометричної нелінійності.

Ключові слова: висотні будівлі, прогресуюче руйнування, загроза, живучість, колона, пожежа.

Дауров М.К., Билык А.С.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЖИВУЧЕСТИ СТАЛЬНЫХ КАРКАСОВ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЖАРА

Высотные здания чувствительны к прогрессирующему разрушению – распространение локального разрушения, которое приводит к разрушению всего здания или непропорционально большой его части. Отечественные нормы требуют обеспечения живучести для высотных зданий при действии неустановленных факторов и, с 2017 года, - при воздействии пожара, что рассматривается в статье.

Ключевые слова: высотные здания, прогрессирующее разрушение, угроза, живучесть, колонна, пожар.

UDC 69.07

Daurov M.K., Bilyk A.S. Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 62-68.

The issue of simulating the effects of a fire on elements of a steel frame and providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire is being studied.

Fig. 5. Ref. 32

УДК 69.07

Дауров М.К., Билык А.С. Забезпечення живучості сталевих каркасів висотних будівель при дії пожежі // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 62-68.

Вивчається питання моделювання впливу пожежі на елементи сталевих каркасів та забезпечення живучості при дії пожежі для сталевих каркасів висотних будівель.

Іл. 5. Бібліог. 32 назв.

УДК 69.07

Дауров М.К., Билык А.С. Обеспечение живучести стальных каркасов высотных зданий при воздействии пожара // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. – С. 62-68.

Изучается вопрос моделирования влияния пожара на элементы стального каркаса и обеспечения живучести при действии пожара для стальных каркасов высотных зданий.

Ил. 5. Библиог. 32 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *магістр технічних наук, Дауров Михайло Костянтинівич.*

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(093) 265-20-72

E-mail: mk19daurov@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-6338-4326>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА Билык Артем Сергійович.*

Робочий тел.: +38(044) 241-55-56

Мобільний тел.: +38(050) 765-2-354

E-mail: artem.bilyk@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9219-920X>

UDC 539.3

GAS TURBINE IMPELLERS FREE VIBRATION STUDY USING THE FEM ANALYSIS

S.O. Morhun, PhD

Lecturer, Department of Engineering Mechanics and Technology of Machine Building

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Ukraine

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.69-76

Abstract. In this paper the problem of gas turbine rotor impellers free vibration has been studied. For its solution, the new, more correct mathematical model on the base of the nonlinear FEM has been designed. All calculations have been held for the two types of boundary conditions ($C - C$ and $C - S$) that match the most common types of the turbine rotors assembling. By the usage of the designed mathematical model several rotor impellers free vibration modes and frequencies have been calculated. The developed mathematical model adequacy has been verified by the comparison of calculated results with the experimental data.

Key words: turbine rotor, impellers, free vibration, finite elements method, vibration modes and frequencies.

1. Introduction.

In the modern world one of the most important trends in the power machine building, marine and aircraft engine building areas is a sharp increase of the gas turbine engines power. But such increase imperatively demands from the designers to complement the whole turbine structure and its main units' durability. Thus we have a need to find out the details and assembly units of the turbine that are extremely loaded. Without any hesitation the turbine rotor should be taken into consideration, because it works under influence of non-stationary gas flow of extremely high temperature. Of course the vibration unfavorable factors influence on the impeller are more sufficient and their impact in the gas turbine rotors breakdowns is more important.

Due to the high cost of the modern high power gas turbines it's very important to develop the more correct mathematical models and numerical methods for their vibration characteristics calculations during the designing process. So despite the intense studies in this area [1–8] there are several important questions left unstudied. That's why the problem of the gas turbine rotor impellers free vibration studying by calculating its vibration modes and frequencies is rather actual.

2. Literature Review and the Problem Statement

Firstly the impeller blades have been considered as a unity of stiff rods or even plates [9, 10]. According to this approach the Bubnov-Halerkin's method was used to calculate the frequency of only one blade. It was considered that all other blades vibrate with the same frequency. So the turbine rotor impeller was simulated only by the vibration of one blade. Of course such approach was incorrect, because in reality the turbine blades are shaped by space curves and their geometric form is sharply different from the rods or even plates.

In modern literature the main issues of the gas turbine rotors correct design and especially strength calculations are linked with the finite element method (FEM) usage. In the paper [9], compressor and also turbine rotors models on the base of FEM are given. But the main disadvantage of these models is an incorrect description of blades feather by the plane finite elements of triangular type. These circumstances sharply decrease the reliability of the obtained results. To prevent all these disadvantages, in the papers [4–6, 11, 12] the three-dimensional finite element models are used. For example, in [4] special five-node finite elements of pyramid type were applied for the rotor modeling. For the turbine blades bandage modeling, the eight-node finite elements of prismatic type were also used. In the paper [5], the authors simulate the blade's feather using the eight-node finite elements of prismatic type and in the paper [6] – four-node finite elements of shell type.

But, as it has been mentioned above, the gas turbine rotor impeller consists of the blades that can be correctly described only by the space curvilinear finite elements. Such elements have been developed in papers [3, 12, 13], but all calculations have been held only for single blades. Thus the problem of the rotor impeller vibration characteristics calculation on the base of the space curvilinear finite elements usage has been out of the question till that time.

There are also several experimental methodologies that could be applied for the research of the impeller free vibration modes [10]. But all of them are very expensive.

3. The Aim and Main Tasks of the Study

The main aim of this work is to research the gas turbine rotor impeller as a solid body free vibration process for two different types of boundary conditions. The first three most dangerous vibration modes and frequencies of the impeller should also be calculated.

To achieve the aim of the work, the following tasks have been set:

- to develop a more correct mathematical model of the gas turbine rotor impeller free vibration state on the base of three-dimensional curvilinear finite elements;
- to study the influence of the rotor blades boundary conditions (conditions of the rotor assembly formation) on the whole impeller free vibration modes and frequencies value;
- to compare the obtained by the numerical calculation results with the experimental data and take a decision about an adequacy of the designed mathematical model and its usefulness for the further researches.

4. Main Materials of the Study

4.1. Model of the gas turbine impeller section and its boundary conditions

The gas turbine rotor impeller can be considered as a cyclically symmetric system, which consists of several sections with equal geometric, inertial and stiff parameters. Each section includes the blade, the corresponding disk sector and the bandage or damping links due to the assembling scheme (fig. 1). Indexes a , b and c are used to mark the left border, middle part and the right border of the section.

The described impeller section is located in the right rectangular Cartesian coordinate system XYZ . The Z axis is normal to the turbine rotor axis of rotation; X axis matches the turbine rotor axis of rotation. The whole coordinate system is rotating with constant angular velocity together with the rotor.

To study the shown section free vibration by means of FEM let's use the Lagrange variation principle (1). Thus:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

where L – Lagrange function, q_i – generalized coordinate of the i node of the section finite elements model, n – the quantity of the finite element nodes.

The whole section is modeled by three types of the finite elements. The turbine blade, which is the most important part of the impeller, is approximated by curvilinear space finite elements with eight nodes. The disk is properly described by the space finite elements of hexagon type with eight nodes. And the bandages or damping links are formed by prismatic finite elements with eight nodes two. The extended description of the reasons why such finite elements have been chosen, their shape functions and fields of displacement are given in papers [13, 14].

After the nonlinear FEM approximation of the impeller section (fig. 1) on the base of (1) we receive the canonic equation of the solid body vibration in matrix form (2). Thus:

$$[M] \left\{ \frac{d^2 \delta}{dt^2} \right\} + [C] \left\{ \frac{d \delta}{dt} \right\} + [K] \{ \delta \} = \{ F \}, \quad (2)$$

where $[M]$ – the FEM model mass matrix; $[C]$ – the FEM model damping matrix; $[K]$ – the FEM model stiffness matrix; $\{ \delta \}$ – the FEM model generalized displacement vector; $\{ F \}$ – the vector of external forces.

As we take into consideration only the rotor's free vibration, then the elements of damping matrix and the vector of external forces are equal to zero. So the matrix equation (2) is transformed to matrix equation (3):

$$[M] \left\{ \frac{d^2 \delta}{dt^2} \right\} + [K] \{ \delta \} = 0, \quad (3)$$

According to the gas turbine rotor assembling schemes there are two types of the impellers – the impellers with bandages and the impellers with damping links. That's why we have to take into consideration two types of boundary conditions. They are $C - C$ for the impeller with bandages and $C - S$ for the impeller with damping links.

4.2. Amplitudes of the gas turbine rotor impeller free vibration.

The solution of matrix equation (3) can be found by spreading out the section generalized displacement in trigonometric row. So:

$$\delta_J = a_J^1 \cos(\omega t) + a_J^2 \sin(\omega t), \quad J = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

where m is a quantity of the finite elements model nodes, ω – angular velocity of the rotor rotation.

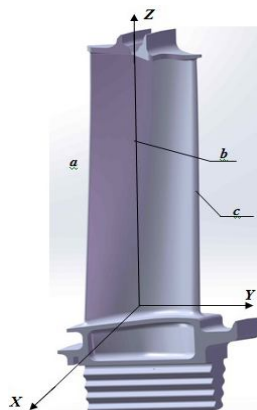


Fig. 1. Three-dimensional model of the bandaged gas turbine rotor impeller section

The indexes 1 and 2 would be used later to differentiate the amplitudes belonging to $\cos(\omega t)$ and $\sin(\omega t)$.

After putting the equation (4) into the equation (3) we will receive next system of matrix equations:

$$\begin{aligned}\Lambda_{1a}a_a^1 + \Lambda_{1b}a_b^1 + \Lambda_{1c}a_c^1 + \Lambda_{1a}a_a^2 + \Lambda_{1b}a_b^2 + \Lambda_{1c}a_c^2 &= 0, \\ \Lambda_{2a}a_a^1 + \Lambda_{2b}a_b^1 + \Lambda_{2c}a_c^1 + \Lambda_{2a}a_a^2 + \Lambda_{2b}a_b^2 + \Lambda_{2c}a_c^2 &= 0, \\ \Lambda_{3a}a_a^1 + \Lambda_{3b}a_b^1 + \Lambda_{3c}a_c^1 + \Lambda_{3a}a_a^2 + \Lambda_{3b}a_b^2 + \Lambda_{3c}a_c^2 &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

where $\Lambda_{IJ} = [K_{IJ}] - f^2[M_{IJ}]$, Λ_{IJ} – blocks of the impeller section dynamic stiffness matrix; f – the impeller free vibration frequency.

Solution of matrix equations systems (5) gives us an opportunity to calculate the unknown impeller free vibration frequency.

5. Main results of the study and their analysis

The aforementioned gas turbine rotor impellers are made out of heat resistant alloy X2CrNiMo 17-34-3, which has the following parameters: density $\rho=8100$ kg/m³; Young's modulus $E=1.79 \cdot 10^6$ MPa; Poisson's ratio $\nu=0.3$ [14]. The quantity of the blades in the impeller is 80. The disk diameter $d=500$ mm; the blade's height $h=120$ mm.

First let's take into consideration the rotor impellers free vibration modes (fig. 2–4).

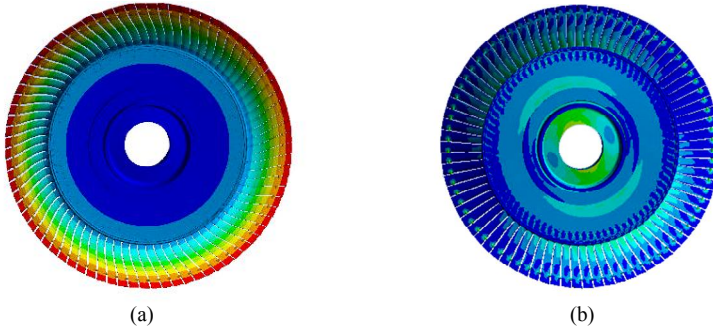


Fig. 2. The impeller free vibration mode with one nodal diameter
(a) – impeller with damping links (boundary conditions $C-S$); (b) – impeller with bandages (boundary conditions $C-C$)

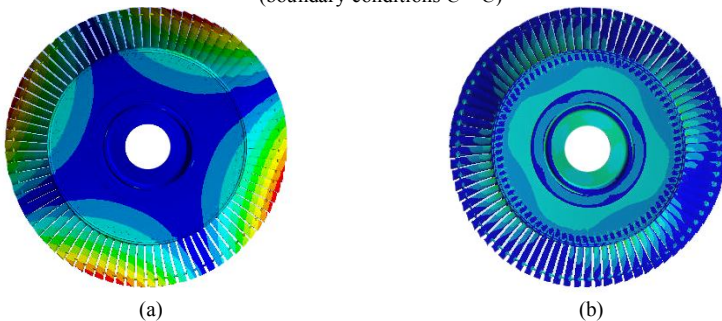


Fig. 3. The impeller free vibration mode with two nodal diameters
(a) – impeller with damping links (boundary conditions $C-S$); (b) – impeller with bandages (boundary conditions $C-C$)

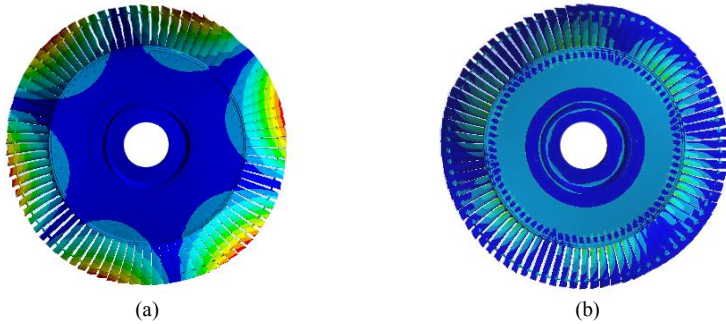


Fig. 4. The impeller free vibration mode with three nodal diameter
 (a) – impeller with damping links (boundary conditions $C-S$); (b) – impeller with bandages (boundary conditions $C-C$)

According to the data, given on the fig. 2 – 4, we can find out that for two types of boundary conditions the modes of impeller free vibration are practically similar. The mode with one nodal diameter almost corresponds the well-known first flexural vibration form for solid bodies. Displacements of the impellers with bandages are much slighter (blue color on fig.2 – 4 (b)), than the displacement of impellers with damping links (red color on fig.2 – 4 (a)). These facts don't contradict the main postulates of the oscillation theory. But there are some differences too. It should be mentioned that for the impeller with damping links the nodal diameters are more obvious. The explanation of this fact is their higher ductility. On the other hand the vibration mode for all types of impellers changes from the bending mode at the peripheral antinodes to the torsion mode near the nodal diameters.

For taking the decision about the developed mathematical model adequacy, we should compare the calculated impeller vibration frequencies with the experimental data (table 1). The experimental methodology is given in the paper [10]. The experiment has been held for three same impellers with damping links.

Table 1

The impeller free vibration frequencies for the first three modes

Nodal diameter	Free vibration frequency f , Hz		Divergence, %
	Calculated data	Experimental data	
1	112	105-108	7,3
2	549	485-502	9,14
3	1086	921-957	12,8

Analyzing the data, represented in table 1, we can conclude that the divergence between the calculated results and experimental data is less than 15%.

7. Conclusions

It has been possible to develop the new refined mathematical model of gas turbine rotor impellers free vibration. The matter is that this model gives an opportunity to take into consideration the turbine blades constructional inhomogeneity, in particular their space curvilinear form with sharp inflections.

It gives the designers an opportunity to calculate the free vibration modes and frequencies for turbo machinery rotors of various types and assembling schemes.

On the base of the developed mathematical model usage the free vibration characteristics of gas turbine rotor impellers of two main types have been calculated. Two different boundary conditions have been taken into consideration. It was found that for both types of impellers the free vibration modes are practically similar due to the nodal diameters location.

The calculated frequencies of the gas turbine impeller free vibration have been compared with the experimental data. The divergence between the obtained results and experimental data has been found too. Such low percentage of divergence shows us that the developed mathematical model is adequate and could be used for further calculations in the field of gas turbine rotor dynamics. Especially it will be useful for the studies of gas turbine rotors stress-strain state, caused by complex effect of forced vibration and thermal load.

REFERENCES

1. *Samaras C.* Emissions and lifetime estimation modeling of industrial gas turbines. / C. Samaras // M. Sc. Progress Review, Cranfield University, UK, 2009. P. 30–35.
2. *Krishnakanth P. V.* Structural and Thermal Analysis of Gas Turbine Blade by using FEM / P. V. Krishnakanth, G. Narasa Raju et. al. // International Journal of Scientific Research Engineering and Technology. 2013 Vol. 2, Issue 2. P. 060–065.
3. *Mrinaline M.* Steady state structural analysis of single crystal turbine blade / M. Mrinaline // International Journal of Engineering Research and Technology. 2016. Vol. V5, Issue 10. P. 382–384. doi: 10.17577/ijertv5is100314
4. *Ugargol R.* Life estimation of turbine blisk for a gas turbine engine / R. Ugargol, K. S. Narayanaswamy, C.V. Sesha Kumar // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2017. Vol. 8, Issue 8. P. 393–399.
5. *Rzadkowski R.* Unsteady forces acting on the rotor blades in the turbine stage in 3D viscous flow in nominal and off-design regimes / R. Rzadkowski, V. Gnesin, L. Kolodyazhnaya // Journal of Vibration Engineering, and Technologies. 2014. Vol. 2, Issue 2. P. 89–95.
6. *Baqersad J.* Predicting full-field dynamic strain on a three-bladed wind turbine using three dimensional point tracking and expansion techniques / J. Baqersad, C. Niezrecki, P. Avitabile // Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2014. 2014. doi: 10.1117/12.2046106
7. *Postnov V.V.* Theoretical and experimental stress-strain analysis of machining gas turbine engine parts made of the high energy structural efficiency alloy / V. V. Postnov, S. V. Starovoitov, S. Yu. Fomin, R. R. Basharov // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2014. Vol. 7, Issue 5. P. 47–50.
8. *Bitkina O.* Experimental and theoretical analysis of the stress–strain state of anisotropic multilayer composite panels for wind turbine blade / O. Bitkina, K.-W. Kang, J.-H. Lee // Renewable Energy. 2015. Vol. 79. P. 219–226. doi: 10.1016/j.renene.2014.11.004
9. *Kostyuk A.G.* Dinamika i prochnost' turbomashin (Dynamics and strength of turbines) / A. G. Kostyuk // Moscow: Mashinostroenie, 1982. 264 p.
10. *Vorobiev Yu.S.* Kolebaniya lopatochnogo apparata turbomashin (Vibration of the turbine blades systems) / Yu. S. Vorobiev // Kyiv: Naukova dumka, 1988. 224 p.
11. *Sosunov V.A.* Teoriya, raschet i proektirovanie aviacionnyh dvigateley i energeticheskikh ustanovok (The theory, calculation and design of the aircraft engines) / V. A. Sosunov, V. M. Chepkin // Moscow: Mosk.energ. in-t., 2003. 677 p.
12. *Pyhalov A.A.* Sticheskiy i dinamicheskiy analiz sbornyh rotorov turbomashin (Static and dynamic analysis of the turbine rotors assemblies) / A. A. Pyhalov, A. E. Milov // Irkutsk: Izd-vo Irkut. tekhn. un-ta, 2007. 194 p.
13. *Morgun S.* The blades constructions finite elements models development / S. Morgun // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: New Solutions in Modern Technologies. 2016. Issue 42 (1214). P. 86–91. doi: 10.20998/2413-4295.2016.42.14

14. *Morhun S.* The influence of the blade feather constructional inhomogeneity on the turbine cooling blades stress-strain state // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Series: Applied Mechanics. 2018. Issue 2/7 (92). P. 11-17. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.125937.

Стаття надійшла до редакції 06.12.2018 р.

Morhun S.

GAS TURBINE IMPELLERS FREE VIBRATION STUDY USING THE FEM ANALYSIS

Due to the rather hard working process gas turbine engines rotor impellers are always heavily influenced by the unfavourable factors of the gas flow. So the close attention should be paid to the vibration processes in the rotor. More worse is the fact that the impeller consists of blades, which have a curvilinear geometric form. So they can't be correctly described by the theory of plates or even by the plate finite elements. That's why the problem can be solved only by the usage of space curvilinear finite elements on the base of which the mathematical model is built. The whole impeller can be considered as a cyclically symmetric system. Thus it can be divided into several sections, one of which would be studied. After the nonlinear FEM approximation of the aforementioned impeller's section we receive a canonic matrix equation of the solid body vibration state. As in this study only the problem of the impeller free vibration is taken into consideration, than the matrix of damping and the vector of external forces are equal to zero. After making all necessary preparations, we find out the section free vibration modes and frequencies. All calculations were held for two types of boundary conditions that are chosen according to the impellers assembling schemes. Calculated results have been compared with the experimental data. As the divergence between them is less than 15%, than the developed mathematical model is adequate. The developed mathematical model and obtained results could be used for the gas turbine rotors forced vibration and stress-strain state study.

Key words: turbine rotor, impellers, free vibration, finite elements method, vibration modes and frequencies.

Морзун С.О.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТКОВИХ ВІНЦІВ ГАЗОТУРБІННОГО ДВИГУНА ЗА ДОПОМОГОЮ СКІНЧЕНО ЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ

Досліджується питання власних коливань лопаткових вінців ротора газотурбінного двигуна. Для цього розроблена удосконалена математична модель власних коливань вінця з використанням тривимірних криволінійних скінчених елементів. Лопатковий вінець може бути представлений в якості суперпозиції секторів, кожний з яких включає в себе сектор диску та лопатку з між лопатковими зв'язками. Для моделювання пера лопатки та сектору диску лопаткового вінця використовуються криволінійні скінчені елементи гексагонального типу, що мають по вісім вузлів з трьома ступенями вільності. Бандажна та коренева полиці лопатки змодельовані також тривимірними скінченими елементами, але призматичного типу. Дослідження проведено для лопаткових вінців, що мають демпферні між лопаткові зв'язки. Охолоджувані лопатки мають у порожнині пера сітку каналів для плинку охолоджуючого повітря. Стінки цих каналів являють собою ребра жорсткості у порожнині пера. Тому для коректного моделювання порожнистого пера лопатки були використані оболонкові скінчені елементи.

Всі розрахунки виконано для двох типів граничних умов ($C - C$ та $C - S$), що відповідають найбільш поширеним типам компоновки роторів. За допомогою розробленої математичної моделі визначено частоти та форми власних коливань лопаткових вінців ротора газотурбінного двигуна. Адекватність розробленої математичної моделі підтверджується порівнянням результатів розрахунку та даних експерименту. Розбіжність між результатами розрахунків та експерименту не перевищує 15%.

Розроблена математична модель та отримані на її основі результати можуть бути використані для подальших розрахунків віброемісності, вібростійкості роторів газотурбінних двигунів, а саме – при визначенні їх напружено-деформованого стану.

Ключові слова: ротор газотурбінного двигуна, лопаткові вінці, вільні коливання, метод скінчених елементів, граничні умови, частоти та форми коливань.

Морзун С.А.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ ВЕНЦОВ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

Исследуются собственные колебания лопаточных венцов ротора газотурбинного двигателя. Для этого разработана уточненная конечно-элементная модель собственных

колебаний венца с использованием трехмерных криволинейных конечных элементов. Все расчеты выполнены для двух типов граничных условий ($C - C$ и $C - S$), которые соответствуют наиболее распространенным вариантам компоновки роторов. На основе разработанной математической модели определены частоты и формы собственных колебаний лопаточных венцов ротора газотурбинного двигателя. Адекватность разработанной математической модели подтверждается сравнениями результатов расчета с данными, полученными экспериментальным путем.

Ключевые слова: ротор газотурбинного двигателя, лопаточные венцы, свободные колебания, метод конечных элементов частоты и формы колебаний.

УДК 539.3

Моргун С.О. Дослідження власних коливань лопаткових вінців газотурбінного двигуна за допомогою скінчено елементного аналізу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 69-76.

Досліджуються власні коливання лопаткових вінців ротора газотурбінного двигуна на основі розробленої удосконаленої математичної моделі з використанням тривимірних криволінійних скінчених елементів. Адекватність математичної моделі підтверджується порівнянням результатів розрахунку та даних експерименту.

Табл. 1. Іл. 4. Бібліогр. 14 назв.

UDC 539.3

Morhun S.O. Gas turbine impellers free vibration study using the fem analysis // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 69-76.

The free vibration of the gas turbine rotor impellers are studied on the basis of the developed advanced mathematical model with the use of three-dimensional curvilinear finite elements. The adequacy of the mathematical model is confirmed by comparing the results of the calculation and the experimental data.

Tabl. 1. Fig. 4. Ref. 14.

УДК 539.3

Моргун С.А. Исследование собственных колебаний лопаточных венцов газотурбинного двигателя с помощью конечно-элементного анализа // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. - С. 69-76.

Исследуются собственные колебания лопаточных венцов ротора газотурбинного двигателя на основе разработанной усовершенствованной математической модели с использованием трехмерных криволинейных конечных элементов. Адекватность математической модели подтверждается сравнением результатов расчета и данных эксперимента.

Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. 14 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *Моргун Сергій Олександрович, канд. техн. наук, доцент без вченого звання, кафедра «Інженерної механіки та технології машинобудування», Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова*
Адреса робоча: *54025, Україна, м. Миколаїв, просп. Героїв України, 9, Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова, кафедра інженерної механіки та технології машинобудування, МОРГУНУ Сергію Олександровичу.*

Мобільний тел.: +38(050)393-28-75

Email: serhii.morhun@nuos.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2881-7541>

SCOPUS ID: 57201675974

Serhii Morhun, PhD, Lecturer, Department of Engineering Mechanics and Technology of Machinebuilding, Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Adr.: *Heroiv Ukrainy ave. 9, Mykolaiv, Ukraine, 54025*

Phone: (+38)050. 393.28.75

Email: serhii.morhun@nuos.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2881-7541>

SCOPUS ID: 57201675974

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

В.Ю. Мірошніков,
канд. техн. наук, доцент

Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків, Україна

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.77-90

Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані переміщення. Розв’язок просторової задачі теорії пружності отримано узагальненим методом Фур’є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов’язаних із циліндром, та декартових координатах, пов’язаних із межами шару. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов, вирішено методом усічення. В результаті були отримані переміщення та напруження в різних точках пружного тіла. Проведено аналіз напружено – деформованого стану тіла при різних відстанях від циліндричної порожнини до меж шару.

Ключові слова: циліндрична порожнина в шарі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур’є, нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вступ. При проектуванні різного роду просторових конструкцій та комунікацій, де розрахунковою схемою є шар з циліндричними порожнинами, необхідно мати уявлення про розподіл напружень навколо циліндричної порожнини та меж шару. Для досягнення цієї мети потрібно мати алгоритм розрахунку, який би давав можливість отримувати результат з необхідною точністю.

В даній роботі розглядається просторова задача теорії пружності, коли порожнина розташована в шарі паралельно його поверхням, на межах шару та на межі порожнини задано переміщення.

В публікаціях зустрічаються задачі для простору, півпростору та шару з циліндричними порожнинами, з різними типами граничних умов на них та різними методами розв’язку.

Так в роботах [1, 2] розглядаються стаціонарні задачі дифракції хвиль в просторі, в півпросторі або шарі з циліндричною порожниною.

В роботах [3, 4] досліджуються задачі про дифракцію хвиль в півпросторі з однією циліндричною порожниною на основі рівняння Гельмгольца. Задачі розв’язуються з використанням перетворення площини з круговим отвором в концентричне кільце, або застосовується комформне перетворення та коллокаційна схема методу найменших квадратів. Описані алгоритми дозволяють розрахувати задачі тільки з однією порожниною у півпросторі і непридатні для шару.

В роботі [5] з використанням методу зображень побудовані чисельно-аналітичні розрахунки двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіяння симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву для шару з циліндричною порожниною.

Шар зі сферичною порожниною, який розтягується радіальними зусиллями на нескінченності, розглянуто в роботі [6].

Порожнистий циліндр та шар з круговим отвором, які розв'язуються за допомогою методу суперпозиції, розглянуто в [7].

Порожнини перпендикулярні до поверхонь шару розглянуті в [8, 9, 10].

Роботи [11, 12, 13] присвячені визначенню напруженого стану кінцевого циліндра. Метод заснований на суперпозиції розв'язків і розкладанні у ряди Фур'є і Діні. Але задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути розв'язані в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [14], який і був покладений в основу підходу до розв'язку задачі, вказаної у заголовку.

За допомогою узагальненого методу Фур'є було розв'язано задачу для півпростору з циліндричними порожнинами в переміщеннях [15], в напруженнях [16, 17, 18] та змішану задачу [19].

Для шару з циліндричними порожнинами готових алгоритмів в просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Метою цієї роботи є:

– розробка аналітико-чисельного алгоритму розрахунку другої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані переміщення) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару;

– проведення аналізу напружено-деформованого стану тіла, визначення впливу відстані між циліндричною порожниною та межами шару на напруження в зоні перехідників між межами шару і циліндром.

Постановка задачі. В пружному однорідному шарі розташована

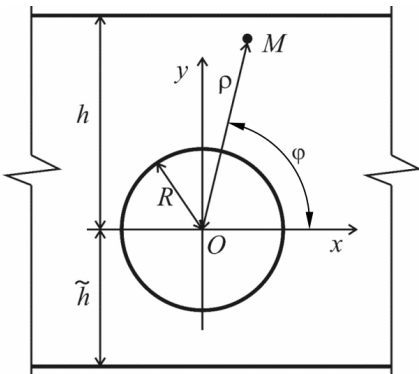


Рис. 1. Шар з циліндричною порожниною

кругова циліндрична порожнина радіусом R (рис. 1). Порожнину будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , межі шару у декартовій системі координат (x, y, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра. Верхня межа шару розташована на відстані $y=h$, нижня межа на відстані $y=-\tilde{h}$. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе за умов, що на межах шару та на межі циліндричної порожнини задані переміщення:

$$\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{U}_h^0(x, z), \quad \vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z), \quad \vec{U}(\varphi, z)|_{\rho=R} = \vec{U}_\rho^0(\varphi, z),$$

де

$$\begin{aligned} \vec{U}_h^0(x, z) &= U_x^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(h)} \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= U_x^{(\tilde{h})} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(\tilde{h})} \vec{e}_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{U}_p^0(\varphi, z) = U_\rho^{(p)} \bar{e}_1^{(2)} + U_\phi^{(p)} \bar{e}_2^{(2)} + U_z^{(p)} \bar{e}_3^{(2)}$$

відомі функції; $\bar{e}_j^{(k)}$ ($j=1,2,3$) – орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті z для циліндра та по координатах x і z для меж шару.

Розв'язок задачі. Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [14]:

$$\bar{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu), \quad k=1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\bar{R}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}, \quad (3)$$

$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} [s_m(\rho; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)}], \quad k=1, 2, 3,$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot), \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot),$$

$$u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y},$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot),$$

$$s_m(\rho; \lambda) = (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho), \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $M_d = (x, y, z)$, $M_p = (\rho, \varphi, z)$ – точки простору, відповідно в декартовій

системі координат та в циліндричній системі координат; $\bar{e}_j^{(k)}$ ($j=1,2,3$) –

орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат; σ –

коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя;

$\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$ ($k=1,2,3$) – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння

Ламе для циліндра; $\bar{u}_k^{(-)}$, $\bar{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для меж шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\bar{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \right. \\ \left. + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \quad (4)$$

де $\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ базисні розв'язки, які задані формулами (2) і (3), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис. 1) скористаємось формулами:

- для переходу від координат циліндра до координат верхньої межі шару [16, ф-ла (4)]

$$\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \cdot \bar{u}_k^{(-)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \cdot \left(\left(m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(-)} + 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(-)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \quad (5)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_1(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$, $y > 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- для переходу від координат циліндра до координат нижньої межі шару

$$\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2 \cdot \bar{u}_k^{(+)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = -\frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2 \cdot \left(\left(m \cdot \mu + \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(+)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(+)} + 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(+)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \quad (6)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_2(\lambda, \mu) = \frac{\mu + \gamma}{\lambda}$, $y < 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- для переходу від координат верхньої межі шару до координат циліндра [16, Ф-ла (5)]

$$\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_1)^m \bar{R}_{k,m}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{u}_2^{(+)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_1)^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} + \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \quad (7)$$

де

$$\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)},$$

$$\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_\varphi \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = & \bar{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho \cdot I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ & + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z \cdot i\lambda\rho I'_n(\lambda\rho), \end{aligned}$$

$$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right],$$

де \bar{e}_ρ , \bar{e}_φ , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат;

- для переходу від координат нижньої межі шару до координат циліндра

$$\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_2)^m \bar{R}_{k,m}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{u}_2^{(-)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_2)^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} - \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \quad (8)$$

Для виконання граничних умов на верхній межі шару $y=h$, вектори $\bar{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу (5) перепишемо у декартовій системі

координат через базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(-)}$. Отриманий вектор прирівнюємо (при $y=h$) заданому $\bar{U}_h^0(x, z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на нижній межі шару $y=-\tilde{h}$, вектори $\bar{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу (6) перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(+)}$. Отриманий вектор прирівнюємо (при $y=-\tilde{h}$) заданому $\bar{U}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{4 \cdot e^{-x} \cdot \gamma^2 \cdot (e^{2x} - 1)(x^2 - \bar{\sigma}^2 \cdot \text{sh}^2 x)}{\lambda^4}, \quad (9)$$

де $x = \gamma(h + \tilde{h})$, $\bar{\sigma} = 3 - 4\sigma$.

З отриманих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на циліндрі $\rho=R$, праву частину (4) за допомогою формул переходу (7, 8) перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки $\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$. Отриманий вектор прирівнюємо заданому $\bar{U}_p^0(x, z)$, представленому інтегралом та рядом Фур'є. В результаті отримуємо сукупність трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Визначник цієї системи [16]:

$$\text{для } m = 0 \quad |\Delta_0| = 8(1 - \sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x),$$

$$\text{для } m \geq 1 \quad |\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(x) K_m(x) K_{m+1}(x), \quad x = |\lambda| \rho, \quad \lambda \neq 0.$$

Розв'язавши цю систему відносно $B_{k,m}(\lambda)$, знайдемо

$$B_{k,m}(\lambda) = F_k(H_1, H_2, H_3, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3),$$

де F_k – лінійні функції 6 аргументів.

Знайдені раніше через $B_{k,m}(\lambda)$ функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ виключимо з системи рівнянь. В результаті отримуємо сукупність із трьох нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Для отриманих систем, використовуючи (9), доведено їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місто збіжність наближених рішень до точного. Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{s,m}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Чисельне дослідження напруженого стану. Маємо шар з циліндричної порожниною (рис. 1). Шар – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,35$, модуль пружності $E = 2 \text{ кН/см}^2$. Радіус циліндричної порожнини $R = 10 \text{ см}$. Верхня межа шару розташована відносно центру циліндра на відстані $h = 40 \text{ см}$, нижня межа розташована в двох варіантах $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ та $\tilde{h} = 20 \text{ см}$.

На межі циліндра задані переміщення $U_\rho^{(p)}(\varphi, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$, $U_\varphi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$. На верхній межі шару $U_x^{(h)} = U_y^{(h)} = U_z^{(h)} = 0$, на нижній межі $U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої по параметру m – порядок системи. При $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ параметр $m = 6$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ параметр $m = 10$. Межі інтегрування для заданих граничних функцій були $[-1, 1]$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів 10^{-4} .

Напружений стан на поверхні циліндричної порожнини в площині $z = 0$ для варіантів, коли $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ та $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ представлений на рис. 2.

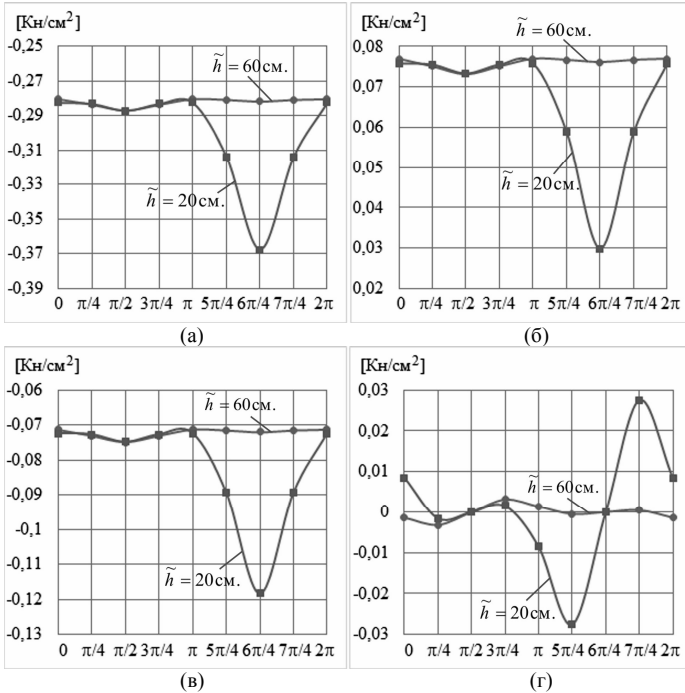


Рис.2. Напружений стан на поверхні циліндричної порожнини:

(а) – σ_ρ ; (б) – σ_φ ; (в) – σ_z ; (г) – $\tau_{\rho\varphi}$

Нормальні напруження на поверхні циліндричної порожнини (рис. 2 (а), (б), (в)) мають екстремальні значення навпроти меж шару ($\pi/2$, $6\pi/4$), та при наближенні цих меж до циліндричної порожнини напруження зростають.

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ на поверхні циліндричної порожнини (рис. 2 (г)) дорівнюють нулю навпроти меж шару ($\pi/2$, $6\pi/4$), екстремальні значення виникають при $\varphi=5\pi/16$, $\varphi=11\pi/16$, $\varphi=21\pi/16$ та $\varphi=27\pi/16$ (табл. 1, табл. 2). При наближенні меж шару до циліндричної порожнини дотичні напруження зростають.

Таблиця 1

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ (кН/см²) на поверхні циліндра при $\tilde{h}=60$ см

φ	0	$\pi/16$	$2\pi/16$	$3\pi/16$	$4\pi/16$	$5\pi/16$	$6\pi/16$	$7\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	-0,0014	-0,0021	-0,0027	-0,0031	-0,0033	-0,0030	-0,0023	-0,0013
φ	$8\pi/16$	$9\pi/16$	$10\pi/16$	$11\pi/16$	$12\pi/16$	$13\pi/16$	$14\pi/16$	$15\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0000	0,0013	0,0023	0,0030	0,0033	0,0031	0,0027	0,0021
φ	$16\pi/16$	$17\pi/16$	$18\pi/16$	$19\pi/16$	$20\pi/16$	$21\pi/16$	$22\pi/16$	$23\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0014	0,0008	0,0002	-0,0002	-0,0005	-0,0006	-0,0005	-0,0003
φ	$24\pi/16$	$25\pi/16$	$26\pi/16$	$27\pi/16$	$28\pi/16$	$29\pi/16$	$30\pi/16$	$31\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0000	0,0003	0,0005	0,0006	0,0005	0,0002	-0,0002	-0,0008

Таблиця 2

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ (кН/см²) на поверхні циліндра при $\tilde{h}=20$ см

φ	0	$\pi/16$	$2\pi/16$	$3\pi/16$	$4\pi/16$	$5\pi/16$	$6\pi/16$	$7\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0085	0,0047	0,0018	-0,0002	-0,0015	-0,0020	-0,0018	-0,0010
φ	$8\pi/16$	$9\pi/16$	$10\pi/16$	$11\pi/16$	$12\pi/16$	$13\pi/16$	$14\pi/16$	$15\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0	0,0010	0,0018	0,0020	0,0015	0,0002	-0,0018	-0,0047
φ	$16\pi/16$	$17\pi/16$	$18\pi/16$	$19\pi/16$	$20\pi/16$	$21\pi/16$	$22\pi/16$	$23\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	-0,0085	-0,0131	-0,0183	-0,0235	-0,0275	-0,0284	-0,0242	-0,0141
φ	$24\pi/16$	$25\pi/16$	$26\pi/16$	$27\pi/16$	$28\pi/16$	$29\pi/16$	$30\pi/16$	$31\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0	0,0141	0,0242	0,0284	0,0275	0,0235	0,0183	0,0131

Найбільші дотичні напруження $\tau_{\rho z}$ на поверхні циліндричної порожнини вздовж осі z виникають при $\varphi=0$ та при $\varphi=\pi$ та є максимальними при віддалених межах шару. При наближенні меж шару до циліндричної порожнини $\tau_{\rho z}$ зменшується. Дотичні напруження $\tau_{\rho z}$ при $\varphi=0$, $\tilde{h}=60$ см представлені на рис. 3.

На перехідках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в

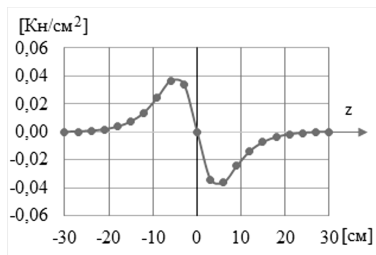
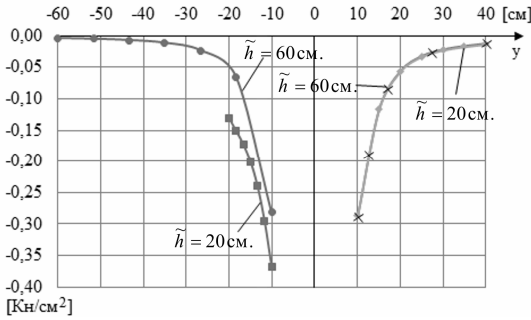


Рис. 3. Напруження $\tau_{\rho z}$ на поверхні циліндричної порожнини вздовж осі z при $\varphi=0$

Рис. 4. Напруження σ_p вздовж осі y в площині $z = 0$

площині $z=0$ напруження σ_p представлені на рис. 4.

Відстань \tilde{h} має вплив до 6% на напруження σ_p на перешийку між циліндром та верхньою межею шару (табл. 3). Найбільший вплив відстані \tilde{h} спостерігається на межі шару ($y=40$ см).

Таблиця 3

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h}=60$ см	-0,2873	-0,1173	-0,0568	-0,0331	-0,0225	-0,0171	-0,0133
$\tilde{h}=20$ см	-0,2871	-0,1172	-0,0570	-0,0336	-0,0232	-0,0179	-0,0141
різниця	0,05%	0,09%	0,35%	1,51%	3,11%	4,68%	6,0%

Суттєвий вплив відстань \tilde{h} має на перешийок між циліндром та нижньою межею шару (рис. 3, $-60 \leq y \leq -10$), де напруження на поверхні циліндричної порожнини ($y=-10$ см) при $\tilde{h}=60$ см становить $\sigma_p = -0,2818$ кН/см², при $\tilde{h}=20$ см становить $\sigma_p = -0,3677$ кН/см². На нижній межі шару при $\tilde{h}=60$ см $\sigma_p = -0,0040$ кН/см², при $\tilde{h}=20$ см $\sigma_p = -0,1312$ кН/см².

Напруження σ_ϕ на перешийках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в площині $z = 0$ представлені на рис. 5.

Різниця в напруженнях σ_ϕ на лінії перешийка між циліндром та верхньою межею шару в залежності від відстані \tilde{h} становить подекуди до 175% (табл. 4).

Таблиця 4

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h}=60$ см	0,0738	0,0315	0,0141	0,0064	0,0019	-0,0019	-0,0068
$\tilde{h}=20$ см	0,0733	0,0303	0,0128	0,0051	0,0007	-0,0030	-0,0076
різниця	0,7%	3,96%	10,15%	25,49%	174,4%	57,89%	11,76%

На перешийку між циліндром та нижньою межею шару (рис. 5) зі зменшенням відстані \tilde{h} напруження σ_ϕ на поверхні циліндричної порожнини зменшується: при $\tilde{h}=60$ см $\sigma_\phi = -0,0761$ кН/см²; при $\tilde{h}=20$ см

$\sigma_\phi = -0,0299 \text{ кН/см}^2$. На нижній межі шару зі зменшенням відстані \tilde{h} напруження σ_ϕ значно збільшуються: при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_\phi = -0,0021 \text{ кН/см}^2$; при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_\phi = -0,0706 \text{ кН/см}^2$.

Напруження σ_z на перешийках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в площині $z=0$ представлені на рис. 6.

На напруження σ_z на перешийку між циліндром та верхньою межею шару відстань \tilde{h} має вплив подекуди у 4 рази (табл. 5).

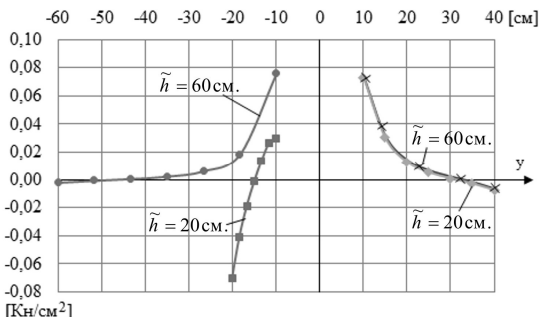


Рис. 5. Напруження σ_ϕ вздовж осі y в площині $z=0$

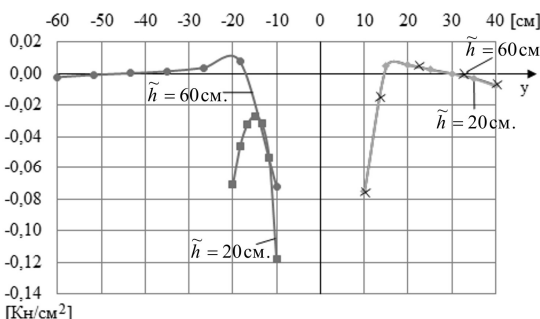


Рис. 6. Напруження σ_z вздовж осі y в площині $z = 0$

Таблиця 5

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h} = 60 \text{ см}$	-0,0749	0,0048	0,0056	0,0029	0,0004	-0,0025	-0,0072
$\tilde{h} = 20 \text{ см}$	-0,0748	0,0047	0,0054	0,0026	0,0001	-0,0029	-0,0076
різниця	0,13%	2,1%	3,3%	11,5%	300%	16%	5,55%

На перешийку між циліндром та нижньою межею шару (рис.6) при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ напруження σ_z не тільки значно більші за значеннями в порівнянні з $\tilde{h} = 60 \text{ см}$, але й мають постійні стискаючі значення напружень. На поверхні циліндра при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,07198 \text{ кН/см}^2$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,11826 \text{ кН/см}^2$. На нижній межі шару при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,00215 \text{ кН/см}^2$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,07063 \text{ кН/см}^2$.

Нормальні напруження вздовж осі x від циліндричної порожнини при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ і при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ мають однакові значення, які зображені на рис. 7.

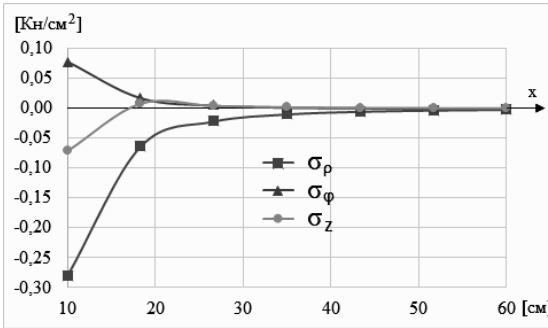


Рис. 7. Напруження σ_ρ , σ_ϕ , σ_z вздовж осі x в площині $z = 0$

Нормальні напруження вздовж осі x мало відрізняються від напружень вздовж осі u при $\tilde{h} = 60$ см по напрямку до нижньої межі шару. З цього можна зробити висновок про те, що при розташуванні межі шару на відстані понад 60 см ($R/h < 0,16$) цією межею можна знехтувати та розраховувати шар як півпростір.

Висновки. За допомогою узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-чисельний алгоритм розрахунку другої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані переміщення) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару. Задача зведена до сукупності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Числові дослідження алгебраїчної системи дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Наведені графіки та таблиці дають картину розподілу напружень у найбільш цікавих зонах – на поверхні циліндричної порожнини та на перехідних між порожниною і межами шару. Проаналізовано вплив відстані між межами шару та циліндричною порожниною на напружений стан тіла.

Подальший розвиток цього напрямку можливий в збільшенні кількості циліндричних порожнин або розрахунку задачі з іншими крайовими умовами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Київ: Наук. Думка. – 1978. – С. 307.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Київ: Наук. Думка. – 1981. – 284 с.
3. Zhao M., van Dalen K.N., Barbosa J.M., Metrikine A.V. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space // International Symposium on Environmental Vibration and Transportation Geodynamics Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. – 2017. – P. 369 – 388.
4. Coskun I., Enginb H., Ozmutlu A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Shock and Vibration. – 2011. – P. 827–838.
5. Волчков В.В., Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными границами // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119 – 133.

6. *Проценко В.С., Николаев А.Г.* Пространственная задача Кирша // Математические методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 3 – 11.
7. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. Київ: Наук.думка. – 1985. – 280 с.
8. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Механика композитов. Том 7. Концентрация напряжений. Київ: Наук. думка. – 1998. – С. 114 – 137.
9. *Ковалев Ю.Д., Стрельникова Е.А., Кушир Д.В., Шрамко Ю.В.* Установившиеся колебания слоя, ослабленного двумя отверстиями, с торцами, покрытыми диафрагмой (симметричный случай) // Проблемы машинобудовання. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 37 – 44.
10. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array // Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
11. *Meleshko V.V., Tokovyy Yu.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J.Eng. Math. – 2013. V. 78. – P.143 – 166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>
12. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. V.36, №10. – P. 1284 – 1316. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>
13. *Дашко О.Г.* Трансверсально-изотропный слой с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Технічні науки. – 2015. – Вип. 1. – С. 231 – 235.
14. *Николаев А.Г., Проценко В.С.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
15. *Мирошников В.Ю.* Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2018. – №79. – С. 88 – 99.
16. *Проценко В. С., Украинец Н. А.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью // Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вип. 2. С. 193–202.
17. *Николаев А.Г., Орлов Е.М.* Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сферoidalной полостью // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
18. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
19. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.

REFERENCES

1. *Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A.* Difraktsiya uprugikh voln (Diffraction of elastic waves). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1978. – P.307. (In Russian).
2. *Grinchenko V.T., Meleshko V. V.* Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh (Harmonic vibrations and waves in elastic bodies). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1981. – 284 s. (In Russian).
3. *Zhao M., van Dalen K. N., Barbosa J. M., Metrikine A. V.* Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space // International Symposium on Environmental Vibration and Transportation Geodynamics Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. – 2017. – P. 369 – 388.
4. *Coskun I., Enginb H., Ozmutlu A.* Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Shock and Vibration. – 2011. – P. 827–838.
5. *Volchkov V.V., Vukolov D.S., Storogev V.I.* Difraktsiya voln sdviga na vnutrennikh tunnel'nykh tsilindricheskikh neodnorodnostyakh v vide polosti i vklucheniya v uprugom sloye so svobodnymi granyami (Diffraction of shear waves by internal tunneling cylindrical non-homogeneities in the form of a cavity and inclusion in an elastic layer with free faces) // Solid mechanics. – 2016. – Vol. 46. – P. 119 – 133. (In Russian).
6. *Protsenko V.S., Nikolaev A.G.* Prostranstvennaya zadacha Kirsha (Kirsch spatial problem) // Mathematical methods for analyzing dynamic systems. – 1982. – Vol. 6. – P. 3 – 11. (In Russian).

7. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy (Spatial problems of the theory of elasticity and plasticity. Equilibrium of elastic bodies of canonical form). - Kiev: Nauk. Dumka. – 1985. – 280 p. (In Russian).
8. *Guz' A.N., Kosmodamianskiy A.S., Shevchenko V.P. and others.* Mekhanika kompozitov (Mechanics of composites). Vol 7. Concentration of stresses. - Kiev: Nauk. Dumka. – 1998. – P. 114 – 137. (In Russian).
9. *Kovalev Yu. D., Strelnikova E. A., Kushnir D. V., Shramko Yu. V.* Ustanovivshiyesya kolebaniya sloya, oslablenogo dvumya otverstiyami, s tortsami, pokrytymi diafragmoy (simmetrichnyy sluchay) (Steady oscillations of the layer weakened by two holes, with the ends covered with a diaphragm (symmetric case)) // Journal of Mechanical Engineering. – 2017. – T. 20, № 4. – P. 37 – 44. (In Russian).
10. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array // Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
11. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J.Eng. Math. – 2013. V. 78. – P.143 – 166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>
12. *Khoroshun L. P.* Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. V.36, №10. – P. 1284 – 1316. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>
13. *Dashko O.G.* Transversal'no-izotropnyy sloy s krugovoy tsilindricheskoy polost'yu pri zadannoy rassheplyayushchey sile (Transversely isotropic layer with a circular cylindrical cavity for a given splitting force) // Zbirnyk naukovykh prats Dniprodzerzhynskoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2015. – Vol. 1. – P. 231 – 235. (In Russian).
14. *Nikolaev A.G., Protsenko V.S.* Obobshchenny metod Fur'ye v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti (Generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity). – Kharkov: National Aerospace University "KhAI", 2011. – 344 c. (In Russian).
15. *Miroshnikov V.Yu.* Druha osnovna zadacha teoriiy pruzhnosti u pivprostori z dekil'nykh komo paralelnykh kruhovymy tsylindrichnykh porozhnynamy (The second main problem of the theory of elasticity in a half-space with several parallel circular cylindrical cavities) // Otkrytyye informatsionnyye i komp'yuternyye integrirovannyye tekhnologii. – 2018. – №79. – P. 88 – 99. (In Ukrainian).
16. *Protsenko V.S., Ukraine N.A.* Primeneniye obobshchennogo metoda Fur'ye k resheniyu pervoy osnovnoy zadachi teorii uprugosti v poluprostranstve s tsilindricheskoy polost'yu (Application of the generalized Fourier method to the solution of the first main problem of the theory of elasticity in a half-space with a cylindrical cavity) // Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. 2015. Vol. 2. P. 193–202. (In Russian).
17. *Nikolaev A.G., Orlov E.M.* Resheniye pervoy osesimmetrichnoy termouprugoy krayevoy zadachi dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva so sferoidal'noy polost'yu (Solution of the first axisymmetric thermoelastic boundary value problem for a transversely isotropic half-space with a spheroidal cavity) // Problemy obchysluvalnoy mekhaniky i mitsnosti konstruksiy. – 2012. – Vol.20. – P. 253-259. (In Russian).
18. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
19. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.

Стаття надійшла 26.11.2018 р.

Miroshnikov V. Yu.

THE STUDY OF THE SECOND MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY

The stress - strain state of a layer with a cylindrical cavity was investigated, when displacements are set at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity. On the cavity and on the boundaries of the layer, displacements are given.

The solution of the spatial problem of the theory of elasticity is obtained by generalized Fourier method in relation to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates connected with the cylinder, and Cartesian coordinates associated with the boundaries of the layer. Infinite systems of linear algebraic equations obtained as a result of satisfaction of boundary conditions, solved by the truncation method. As a result, movements and strains were obtained at different points of the elastic body.

Numerical studies of the algebraic system of equations give grounds to assert that its solution can be found with any degree of accuracy by the method of reduction, which is proved by the high accuracy of the implementation of boundary conditions.

A numerical analysis of the stress - strain state of the body at various distances from the cylindrical cavity to the boundaries of the layer is carried out.

The greatest normal stresses occur on the surface of the cylindrical cavity and on the isthmus between the surface of the cylindrical cavity and the boundaries of the layer. As the boundary surfaces approach each other, the stresses increase.

The greatest tangential stresses $\tau_{\rho\varphi}$ arise on the surface of the cylindrical cavity at $\varphi = 5\pi / 16$, $\varphi = 11\pi / 16$, $\varphi = 21\pi / 16$ and $\varphi = 27\pi / 16$, and with the approximation of the boundary surfaces to each other the stress $\tau_{\rho\varphi}$ increases.

The greatest tangential stresses $\tau_{\rho z}$ arise on the surface of the cylindrical cavity along the z axis at $\varphi = 0$ and at $\varphi = \pi$. When the boundaries of the layer approximation the cylindrical cavity $\tau_{\rho z}$ decreases.

The given analysis and algorithm of calculation can be used in the design of constructions, in the calculation schemes of which there is a layer with a cylindrical cavity and specified on the boundary surfaces by displacements.

Keywords: cylindrical cavity in a layer, Lamé's equation, generalized Fourier method, infinite systems of linear algebraic equations.

Мирошников В. Ю.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы перемещения. Решение пространственной задачи теории упругости получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндром, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученные в результате удовлетворения граничных условий, решено методом усечения. В результате были получены перемещения и напряжения в различных точках упругого тела. Проведен анализ напряженно - деформированного состояния тела при различных расстояниях от цилиндрической полости до границ слоя.

Ключевые слова: цилиндрическая полость в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

УДК 539.3

Мирошников В.Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 77-90.

Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані переміщення.

Табл. 5. Іл. 7. Бібліогр. 19 назв.

UDC 539.3

Miroshnikov V.Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 77-90. – Ukr.

The stress - strain state of a layer with a cylindrical cavity was investigated, when displacements are set at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity.

Tabl. 5. Fig. 7. Ref. 19.

УДК 539.3

Мирошников В.Ю. Исследование второй основной задачи теории упругости для слоя с цилиндрической полостью // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. - С. 77-90.

Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы перемещения.

Табл. 5. Ил. 7. Библиогр. 19 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури Мірошніков Віталій Юрійович*

Адреса робоча: *61002, Україна, м. Харків, вул.Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Мірошнікову Віталію Юрійовичу*

Робочий тел.: *+38 057 7062063*

Мобільний. тел.: *+38 067 7893333*

Е-mail: *m0672628781@gmail.com*

ORCID ID *http://orcid.org/0000-0002-9491-0181*

УДК 693.546

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ РОЛИКОВОЇ ФОРМУВАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ З КРИВОШИПНО-ШАТУННИМ ПРИВІДНИМ МЕХАНІЗМОМ

В.С. Ловейкін¹,
д-р техн. наук, професор

К.І. Почка²,
канд. техн. наук, доцент

Ю.О. Ромасевич¹,
д-р техн. наук, доцент

О.Б. Почка²

¹*Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, Україна, 03041*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна, 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.91-108

Для роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним привідним механізмом розраховано навантаження в елементах її конструкції та приводу, визначено функцію зміни необхідного крутного моменту для забезпечення процесу ущільнення виробів з будівельних сумішей із врахуванням дисипації привідного механізму. Встановлено залежність моменту у муфті приводу від величини коефіцієнта дисипації, розраховано функції зміни кінематичних характеристик установки при різних значеннях коефіцієнта дисипації, визначено рекомендовані величини жорсткості та коефіцієнта дисипації.

Ключові слова: роликова формувальна установка, привідний механізм, зусилля, момент, жорсткість приводу, дисипація.

Постановка задачі. В установках роликового формування залізобетонних виробів під час їхньої роботи виникають значні динамічні навантаження в елементах приводного механізму та в елементах формувальних візків [1-14]. Незважаючи на досить широке дослідження технологічного процесу формування залізобетонних виробів безвібраційним роликовим методом [1-4], дотепер не було досліджено динаміку руху формувального візка та її вплив на процес формування. Мало приділялось уваги режимам руху формувального візка та зусиллям, що виникають в елементах приводного механізму.

Огляд публікацій. В існуючих теоретичних та експериментальних дослідженнях машин роликового формування залізобетонних виробів обґрунтовано їхні конструктивні параметри та продуктивність [1-4]. Разом з тим недостатньо уваги приділено дослідженню діючих динамічних навантажень та режимів руху, що в значній мірі впливає на роботу установки та якість готової продукції. Під час постійних пускогальмівних режимів руху виникають значні динамічні навантаження в елементах приводного механізму та в елементах формувального візка, що може призвести до передчасного виходу установки з ладу [1-6, 9-11]. Тому

актуальною є задача дослідження динамічних навантажень в елементах установки. В роботах [12, 14] визначались навантаження в елементах роликів формувальних установок, однак при цьому не було враховано жорсткість та коефіцієнт дисипації приводного механізму.

Мета роботи. Метою даної роботи є визначення навантажень в елементах роликів формувальної установки з кривошипно-шатунним приводним механізмом із урахуванням жорсткості та коефіцієнта дисипації передавального механізму.

Виклад основного матеріалу дослідження. Роликів формувальна установка (рис. 1) складається з формувального візка 1, що через шарнірно

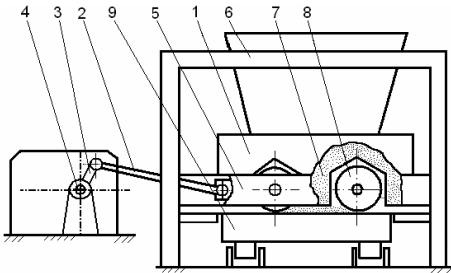


Рис. 1. Роликів формувальна установка з кривошипно-шатунним приводом

з'єднаний з ним шатун 2 приводиться до зворотно-поступального руху від кривошипа 3, який закріплений на приводному валу 4. Формувальний візок змонтований в напрямних руху 5 на порталі 6. При зворотно-поступальному русі формувального візка 1 бетонна суміш, що поступає з секції подавального

бункера 7, попадає під укочувальні ролики 8. Форма 9 при цьому рухається перпендикулярно руху формувального візка 1 і знаходиться під ущільнюючими роликами.

Пристрій встановлюється таким чином, що під порожниною форми знаходиться лише частина робочого органа. Суміш при цьому заповнює порожнину форми. Коли рівень суміші досягає рівня ролика, який здійснює зворотно-поступальний рух, починається його взаємодія з сумішшю, тобто процес ущільнення. По мірі руху форми суміш стає все більш щільною і потребує меншого об'єму під поверхнею робочого органа. Процес ущільнення продовжується до тих пір, поки кожна поверхня виробу не пройде повний цикл ущільнення.

Під час роботи роликів формувальної установки з кривошипно-шатунним приводним механізмом в елементах передавального механізму від електродвигуна до кривошипа виникають значні динамічні навантаження, які призводять до передчасного руйнування елементів конструкції приводу.

Для дослідження цих навантажень використовуємо двомасову динамічну модель роликів формувальної установки (рис. 2). В цій моделі прийняті такі позначення: M_{n1} – рушійний момент на валу приводного

електродвигуна зведений до осі повороту кривошипа;

M_{n2} – момент від сил опору переміщення формувального візка з укочувальними роликами, зведений до осі повороту кривошипа; J_{n1} – зведений до осі повороту кривошипа момент інерції ротора електродвигуна та

елементів привідного механізму; $J_{п2}$ – зведений до осі повороту кривошипа момент інерції формувального візка та кривошипно-шатунного механізму; c – коефіцієнт жорсткості привідного механізму, зведений до осі повороту кривошипа; φ_1 та φ_2 – узагальнені координати зведених мас $J_{п1}$ та $J_{п2}$ відповідно.

Зведений момент інерції привідного механізму можна визначити наступною залежністю:

$$J_{п1} = (J_p + J_M) \cdot \delta \cdot u^2, \quad (1)$$

де J_p та J_M – моменти інерції двигуна і муфти, що з'єднує вал двигуна та вхідний вал редуктора відповідно; δ – коефіцієнт, що враховує моменти інерції елементів редуктора, зведених до вала двигуна; u – передаточне число редуктора.

Зведений момент інерції $J_{п2}$ визначимо з другої частини механізму (рис. 3), яка містить кривошипно-шатунний механізм з формувальним візком. При цьому масу шатуна $m_{ш}$ порівно поділимо в точках A та B . Тоді момент інерції кривошипа буде визначатися залежністю:

$$J_K = J'_K + \frac{m_{ш}}{2} \cdot r^2, \quad (2)$$

а маса візка буде дорівнювати:

$$m_B = m'_B + \frac{m_{ш}}{2}. \quad (3)$$

Тут $m_{ш}$ – маса шатуна; m'_B – маса формувального візка; J'_K – момент інерції кривошипа відносно власної осі обертання; r – радіус кривошипа; J_K – момент інерції кривошипа з половиною маси шатуна відносно осі обертання; m_B – маса візка з половиною маси шатуна.

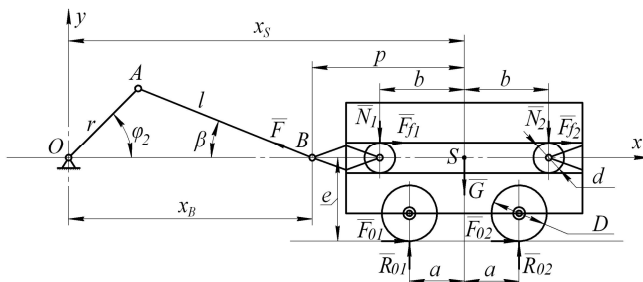


Рис. 3. Розрахункова схема роликової формувальної установки

Зведений момент інерції $J_{п2}$ визначимо з умови рівності кінетичних енергій кривошипно-шатунного механізму з візком T_p (див. рис. 3) та другого диска динамічної моделі (див. рис. 2) T_M , тобто $T_p = T_M$.

Знайдемо кінетичну енергію кривошипно-шатунного механізму з візком:

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot J_k \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \dot{x}_S^2, \quad (4)$$

де \dot{x}_S – швидкість центра мас формувального візка.

Оскільки візок рухається поступально, то усі його точки мають однакову швидкість. Тому можна прийняти, що $\dot{x}_S = \dot{x}_B$. Виразимо швидкість точки B через координату кривошипа та її похідну за часом. Для цього скористаємось залежністю:

$$\dot{x}_B = \dot{\varphi}_2 \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2}. \quad (5)$$

Тоді залежність (4) буде мати вигляд:

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \cdot \left[J_k + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Кінетична енергія другого диска (див. рис. 2) виражається залежністю:

$$T_m = \frac{1}{2} \cdot J_{п2} \cdot \dot{\varphi}_2^2. \quad (7)$$

Прирівнюючи залежності (6) та (7), будемо мати:

$$\frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \cdot \left[J_k + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot J_{п2} \cdot \dot{\varphi}_2^2. \quad (8)$$

З рівняння (8) отримуємо:

$$J_{п2} = J_k + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2. \quad (9)$$

Для визначення зведеного моменту сил опору $M_{п2}$ скористаємось схемою (див. рис. 3), на якій прийняті такі позначення: F – зусилля в шатуні, яке необхідне для подолання сил опору, що діють на візок; β – кутова координата, яка визначає положення шатуна відносно горизонталі; F_{01} , F_{02} – горизонтальні сили взаємодії укочувальних роликів з бетонною сумішшю; R_{01} , R_{02} – вертикальні сили взаємодії укочувальних роликів з бетонною сумішшю; N_1 , N_2 – нормальні реакції напрямних руху формувального візка на напрямні ролики; $F_{f1} = N_1 \cdot f_{np}$, $F_{f2} = N_2 \cdot f_{np}$ – сили тертя напрямних роликів по напрямних руху формувального візка; f_{np} – зведений коефіцієнт тертя напрямних роликів по напрямних руху формувального візка; G – сила тяжіння формувального візка; a , b , p , e – геометричні розміри формувального візка; D – діаметр укочувального ролика; d – діаметр напрямного ролика; l – довжина шатуна.

Для визначення реакцій напрямних роликів N_1 та N_2 і зусилля в шатуні F розглянемо статичну рівновагу формувального візка. Спроекуємо всі сили, що діють на візок, на координатні осі x і y та

складемо суму моментів цих сил відносно точки B (див. рис. 3), в результаті чого отримуємо:

$$\begin{cases} \sum X = -F \cdot \cos \beta + N_1 \cdot f_{\text{np}} + N_2 \cdot f_{\text{np}} + F_{01} + F_{02} = 0; \\ \sum Y = F \cdot \sin \beta - N_1 - N_2 - G + R_{01} + R_{02} = 0; \\ \sum M_B = -N_1(p-b) - N_2(p+b) - Gp - (N_1 + N_2) f_{\text{np}} \frac{d}{2} + \\ \quad + (F_{01} + F_{02}) \cdot e + R_{01}(p-a) + R_{02}(p+a) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Розв'язавши систему рівнянь (10), знаходимо:

$$F = \frac{1}{\cos \beta - f_{\text{np}} \cdot \sin \beta} \cdot [(R_{01} + R_{02} - G) \cdot f_{\text{np}} + F_{01} + F_{02}]. \quad (11)$$

$$N_2 = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot [R_{01} \cdot (b - a - f_{\text{np}} \cdot d/2) + R_{02} \cdot (b + a - f_{\text{np}} \cdot d/2) - G \cdot (b - f_{\text{np}} \cdot d/2) + F \cdot \sin \beta \cdot (b - p - f_{\text{np}} \cdot d/2)], \quad (12)$$

$$N_1 = R_{01} + R_{02} + F \cdot \sin \beta - N_2 - G. \quad (13)$$

На основі залежності (11) знайдемо момент сил опору, зведений до осі повороту кривошипа:

$$M_{\text{п2}} = F \cdot r \cdot \cos(\pi/2 - \varphi_2 - \beta) = F \cdot r \cdot \sin(\varphi_2 + \beta). \quad (14)$$

Величина кута β може бути визначена зі співвідношення:

$$r \cdot \sin \varphi_2 = l \cdot \sin \beta. \quad (15)$$

Звідки:

$$\beta = \arcsin(r/l \cdot \sin \varphi_2). \quad (16)$$

Використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, складемо диференціальні рівняння руху роликів формувальної установки, представлені двомасовою динамічною моделлю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_{\varphi_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= Q_{\varphi_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

де t – час; T – кінетична енергія системи; Q_{φ_1} , Q_{φ_2} – узагальнені сили, що відповідають координатам φ_1 та φ_2 відповідно; Π – потенціальна енергія системи, яка має вигляд:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (18)$$

Кінетична енергія системи виражається залежністю:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{п1}} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[J_{\kappa} + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \cdot \dot{\varphi}_2^2. \quad (19)$$

Узагальнені сили мають вигляд:

$$Q_{\varphi_1} = M_{\text{п1}}; \quad Q_{\varphi_2} = M_{\text{п2}}, \quad (20)$$

де $M_{п1}$ – рушійний момент на валу приводного електродвигуна, зведений до осі повороту кривошипа, який визначається за формулою Клосса:

$$M_{п1} = \frac{2 \cdot M_{кр} \cdot u \cdot \eta_{п}}{\frac{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}}. \quad (21)$$

Тут $M_{кр}$ – критичний (максимальний) момент на валу привідного електродвигуна; u – передаточне число привідного механізму; $\eta_{п}$ – коефіцієнт корисної дії привідного механізму; ω_0 – синхронна кутова швидкість ротора привідного електродвигуна; $s_{кр}$ – критичне ковзання електродвигуна, яке визначається залежністю:

$$s_{кр} = s_{н} \cdot \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right),$$

де λ – кратність максимального моменту електродвигуна (перевантажувальна здатність двигуна); $s_{н}$ – номінальне ковзання електродвигуна, що визначається наступним виразом:

$$s_{н} = 1 - \frac{\omega_{н}}{\omega_0}.$$

Тут $\omega_{н}$ – номінальна кутова швидкість ротора привідного електродвигуна.

Взявши похідні від виразу кінетичної енергії системи, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_B \cdot \dot{\varphi}_2^2 \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_2^2}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_{п1} \cdot \dot{\varphi}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_{п1} \cdot \ddot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \left[J_{к} + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \cdot \dot{\varphi}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left[J_{к} + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\varphi}_2 + 2 \cdot m_B \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_2^2} \cdot \dot{\varphi}_2^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Після підстановки виразів (18), (20), (21), (22), (11) та (14) в систему рівнянь (17) отримаємо:

$$\begin{cases} J_{п1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = \frac{2 \cdot M_{кр} \cdot u \cdot \eta_{п}}{\frac{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}} - c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \left[J_{к} + m_B \cdot \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_B \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_2^2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 = c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \frac{1}{\cos \beta - f_{пр} \cdot \sin \beta} \cdot \left[(R_{01} + R_{02} - G) \cdot f_{пр} + F_{01} + F_{02} \right] \cdot r \cdot \sin(\varphi_2 + \beta). \end{cases} \quad (23)$$

Для роликової формувальної установки з параметрами [4]: $r = 0,2\text{ м}$; $l = 0,8\text{ м}$; горизонтальні сили взаємодії укочувальних роликів з бетонною сумішшю $F_{01} = F_{02} = 7962\text{ Н}$ при здійсненні процесу ущільнення формувальним візком з двома укочувальними роликами радіусом $R = 0,11\text{ м}$ будівельної суміші з наступними характеристиками: висота виробу – $h_0 = 0,22\text{ м}$, ширина виробу – $B = 1,164\text{ м}$; тип суміші, що ущільнюється, – дрібнозерниста суміш; вологість бетонної суміші – $W = 10\%$; потрібна щільність виробу – $k_{\text{ущ}} = 0,98$; величина максимального контактного тиску, що забезпечує $k_{\text{ущ}} = 0,98$ при $W = 10\%$, за експериментальними даними $p = 625\text{ кПа}$; $R_{01} = R_{02} = 9740\text{ Н}$; $m_{\text{ш}} = 64\text{ кг}$; $m'_B = 1000\text{ кг}$; $f_{\text{пр}} = 0,008$; $D = 0,22\text{ м}$; $d = 0,046\text{ м}$; $a = 0,27\text{ м}$; $b = 0,37\text{ м}$; $p = 0,52\text{ м}$; $e = 0,21\text{ м}$; маса візка з половиною маси шатуна $m_B = 1032\text{ кг}$; $G = 10124,9\text{ Н}$ за виразами (11)-(14) розраховано та побудовано графіки зміни реакцій напрямних роликів N_1 та N_2 (рис. 4), зусилля в шатуні F (рис. 5) та моменту сил опору $M_{\text{п2}}$ (рис. 6) в залежності від кута повороту кривошипа.

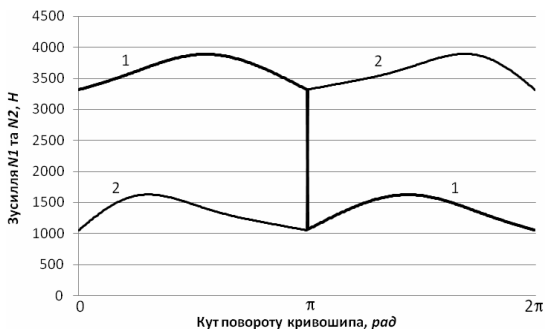


Рис. 4. Графіки зміни реакцій напрямних роликів N_1 (1) та N_2 (2) в залежності від кута повороту кривошипа



Рис. 5. Графік зміни зусилля в шатуні F в залежності від кута повороту кривошипа

За середнім значенням зведеного моменту сил опору за цикл повороту кривошипа визначено номінальну розрахункову потужність двигуна [15]. За цими даними вибрано асинхронний електродвигун з короткозамкненим ротором серії 4А основного виконання 4А132S6У3 [16] з наступними параметрами: $\omega_0 = 104,72 \text{ рад/с}$, $\omega_n = 101,05 \text{ рад/с}$, $\omega_{кр} = 87,16 \text{ рад/с}$ – синхронна, номінальна та критична швидкості обертання ротора двигуна; $J_p = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момент інерції ротора двигуна; $M_n = 97,97 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – пусковий момент; $M_H = 54,43 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – номінальний момент; $M_{кр} = 136,075 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – критичний момент; $\lambda = M_{кр} / M_H = 2,5$ – відношення критичного моменту до номінального; $s_n = 0,035$ – номінальне ковзання електродвигуна; $s_{кр} = 0,1677$ – критичне ковзання електродвигуна. Також підібрано з'єднувальну муфту МУВП [17] з номінальним моментом, що передається $M_{ном} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$ і моментом інерції $J_m = 0,32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ та редуктор Ц2-400 з передаточним числом $u = 9,8$ і моментом інерції $J_{ред} = 0,036 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.



Рис. 6. Графік зміни моменту сил опору $M_{п2}$ в залежності від кута повороту кривошипа

Значення першої та другої передаточних функцій формувального візка визначаються з виразу функції зміни координати візка (див. рис. 3) [12, 15]:

$$x_B = r \cdot \cos \varphi_2 + l \cdot \cos \beta. \quad (24)$$

З рівності (15) можна отримати:

$$\sin \beta = (r/l) \cdot \sin \varphi_2 \rightarrow \cos \beta = \left[1 - \left((r/l) \cdot \sin \varphi_2 \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Вираз $\cos \beta$ можна розкласти в ряд за формулою бінома Ньютона:

$$\left[1 - \left((r/l) \cdot \sin \varphi_2 \right)^2 \right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left((r/l) \cdot \sin \varphi_2 \right)^2 - \frac{1}{8} \left((r/l) \cdot \sin \varphi_2 \right)^4 - \dots \quad (26)$$

Відношення r/l для роликів формувальних установок з кривошипно-шатунними приводними механізмами не перевищують $1/3$ і ряд (26) досить швидко сходиться. Тому з достатньою для практики точністю можна відкинути третій та подальші члени ряду (26). Тоді залежність (24) буде мати вигляд:

$$x_B = r \cdot \cos \varphi_2 + l \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{l} \cdot \sin \varphi_2 \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Значення першої та другої передаточних функцій формувального візка матимуть вигляд:

$$\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} = -r \cdot \left(\sin \varphi_2 + \frac{r}{2 \cdot l} \cdot \sin 2\varphi_2 \right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_2^2} = -r \cdot \left(\cos \varphi_2 + \frac{r}{l} \cdot \cos 2\varphi_2 \right). \quad (29)$$

В результаті числового експерименту встановлено, що оптимальне значення жорсткості привідного механізму, зведеної до осі обертання кривошипа, установки з кривошипно-шатунним приводом із наведеними вище параметрами становить $c = 70000 \text{ Н/м}$. Визначення оптимального значення жорсткості привідного механізму здійснювалось за методикою, описаною в роботах [18, 19]. При цьому значенні жорсткості спостерігаються мінімальні навантаження у муфтах привідного механізму. Це значення жорсткості використано в наступних розрахунках.

Для дослідження динаміки руху роликової формувальної установки з урахуванням дисипації при пуско-гальмівних режимах руху формувальних візків систему рівнянь (23) було доповнено величиною дисипації приводу k :

$$\begin{cases} J_{\text{п1}} \cdot \ddot{\varphi}_1 = \frac{2 \cdot M_{\text{кр}} \cdot u \cdot \eta_{\text{п}}}{\frac{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}{s_{\text{кр}}} + \frac{s_{\text{кр}}}{1 - \dot{\varphi}_1 \cdot u / \omega_0}} - c(\varphi_1 - \varphi_2) - k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \\ \left[J_{\text{к}} + m_B \left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_B \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_2^2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \\ - \frac{1}{\cos \beta - f_{\text{пр}} \cdot \sin \beta} \cdot \left[(R_{01} + R_{02} - G) f_{\text{пр}} + F_{01} + F_{02} \right] \cdot r \cdot \sin(\varphi_2 + \beta). \end{cases} \quad (30)$$

Із системи рівнянь (30) визначено та побудовано графічну залежність зміни максимального $M_{\text{муф}} \text{ max}$ (рис. 7) та середньоквадратичного $\tilde{M}_{\text{муф}}$ (рис. 8) моментів у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації. Аналіз графіків показує, що при значенні коефіцієнта дисипації близько до $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ відбувається розрив плавної кривої на обох графіках.

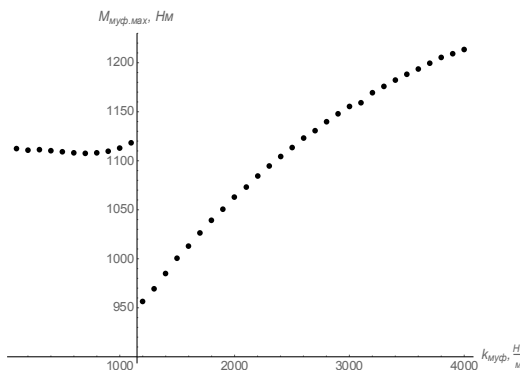


Рис. 7. Графік зміни максимального моменту $M_{\text{муф}} \text{ max}$ у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації

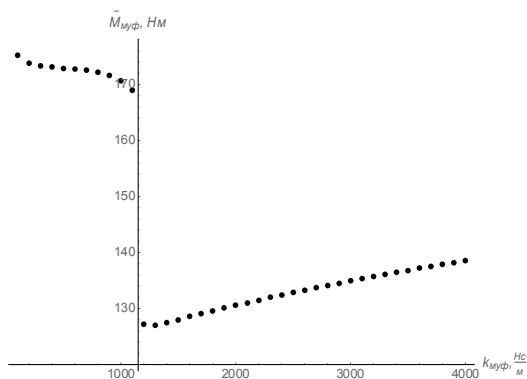


Рис. 8. Графік зміни середньоквадратичного моменту $\tilde{M}_{\text{муф}}$ у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації

Для більш точного дослідження розраховано та побудовано графіки зміни максимального $M_{\text{муф max}}$ (рис. 9) та середньоквадратичного $\tilde{M}_{\text{муф}}$ (рис. 10) моментів у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації в приводі в межах від $k = 1150 \text{ H} \cdot \text{c}/\text{м}$ до $k = 1200 \text{ H} \cdot \text{c}/\text{м}$.

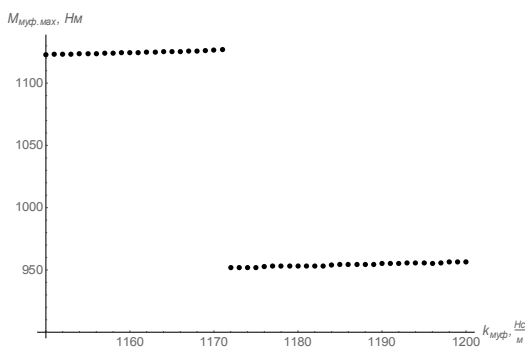


Рис. 9. Графік зміни максимального моменту $M_{\text{муф max}}$ у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації

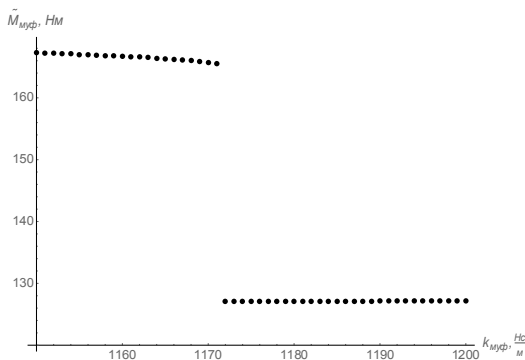


Рис. 10. Графік зміни середньоквадратичного моменту $\tilde{M}_{\text{муф}}$ у муфті в залежності від коефіцієнта дисипації

Аналіз цих графіків показує, що розрив функції відбувається при значенні коефіцієнта дисипації $k = 1171 \text{ H} \cdot \text{с}/\text{м}$.

Виходячи із системи рівнянь (30), побудовано графіки зміни кутової швидкості обертання вала двигуна $\dot{\phi}_1$, зведеної до осі обертання кривошипа, (рис. 11) та кутової швидкості привідного вала кривошипа $\dot{\phi}_2$ (рис. 12) в залежності від часу при значеннях коефіцієнта дисипації $k = 1170 \text{ H} \cdot \text{с}/\text{м}$ (сірий колір) та $k = 1200 \text{ H} \cdot \text{с}/\text{м}$ (чорний колір).

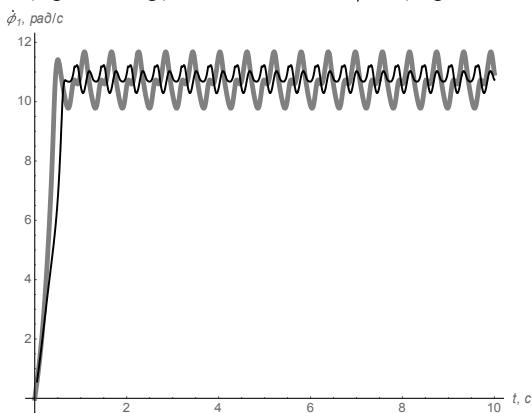


Рис. 11. Графік зміни кутової швидкості обертання вала двигуна $\dot{\phi}_1$ в залежності від часу

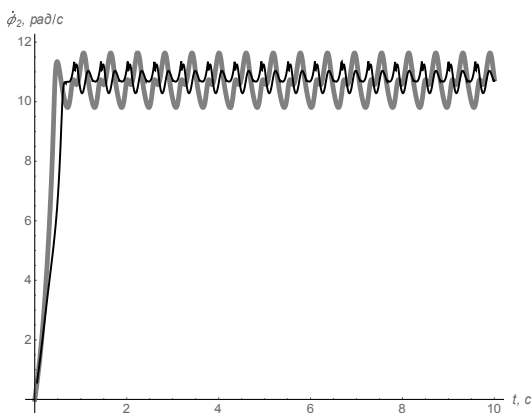


Рис. 12. Графік зміни кутової швидкості обертання кривошипа $\dot{\phi}_2$ в залежності від часу

Аналіз графіків на рис. 11 показує, що при значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1170 \text{ H} \cdot \text{с}/\text{м}$ кутова швидкість обертання вала двигуна $\dot{\phi}_1$, зведена до осі обертання кривошипа, на усталеному режимі руху змінюється в межах від $\dot{\phi}_{1\text{min}} = 9,7803 \text{ рад}/\text{с}$ до $\dot{\phi}_{1\text{max}} = 11,677 \text{ рад}/\text{с}$. При цьому її середнє значення дорівнює $\dot{\phi}_{1\text{сеп}} = 10,676 \text{ рад}/\text{с}$, а коефіцієнт нерівномірності руху визначається залежністю [20]:

$$\delta = \frac{\dot{\varphi}_{1\max} - \dot{\varphi}_{1\min}}{\dot{\varphi}_{1\text{сеп}}} = \frac{11,6772 - 9,78027}{10,6758} = 0,177683. \quad (31)$$

При значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ кутова швидкість обертання вала двигуна $\dot{\varphi}_1$, зведена до осі обертання кривошипа, на усталеному режимі руху змінюється в межах від $\dot{\varphi}_{1\min} = 10,289 \text{ рад}/\text{с}$ до $\dot{\varphi}_{1\max} = 11,229 \text{ рад}/\text{с}$. При цьому її середнє значення дорівнює $\dot{\varphi}_{1\text{сеп}} = 10,8014 \text{ рад}/\text{с}$, а коефіцієнт нерівномірності руху становить $\delta = 0,0870176$.

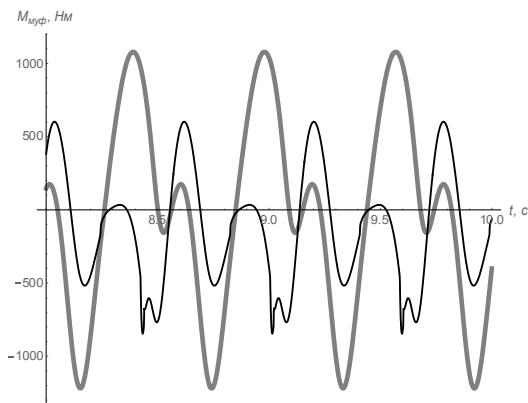
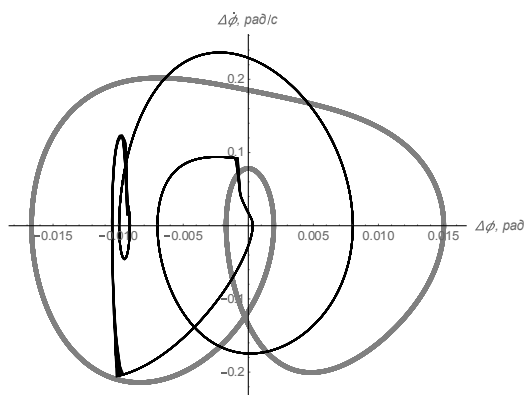
Аналіз графіків на рис. 12 показує, що при значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ кутова швидкість кривошипа на усталеному режимі руху змінюється в межах від $\dot{\varphi}_{2\min} = 9,80743 \text{ рад}/\text{с}$ до $\dot{\varphi}_{2\max} = 11,6358 \text{ рад}/\text{с}$. При цьому її середнє значення дорівнює $\dot{\varphi}_{2\text{сеп}} = 10,676 \text{ рад}/\text{с}$, а коефіцієнт нерівномірності руху становить $\delta = 0,171253$.

При значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ кутова швидкість кривошипа на усталеному режимі руху змінюється в межах від $\dot{\varphi}_{2\min} = 10,285 \text{ рад}/\text{с}$ до $\dot{\varphi}_{2\max} = 11,362 \text{ рад}/\text{с}$. При цьому її середнє значення дорівнює $\dot{\varphi}_{2\text{сеп}} = 10,8008 \text{ рад}/\text{с}$, а коефіцієнт нерівномірності руху становить $\delta = 0,0996688$.

Виходячи із системи рівнянь (30), побудовано графіки зміни моменту у муфті $M_{\text{муф}}$ (рис. 13) в залежності від часу при значеннях коефіцієнта дисипації $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ (сірий колір) та $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ (чорний колір). Аналіз цих графіків показує, що при значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ момент у муфті на усталеному режимі руху змінюється в межах від $M_{\text{муф}\min} = -1240 \text{ Н} \cdot \text{м}$ до $M_{\text{муф}\max} = 1100 \text{ Н} \cdot \text{м}$. При значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ момент у муфті на усталеному режимі руху змінюється в межах від $M_{\text{муф}\min} = -850 \text{ Н} \cdot \text{м}$ до $M_{\text{муф}\max} = 610 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

На рис. 14 наведено графічні залежності $((\varphi_1 - \varphi_2), (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2))$ установки при значеннях коефіцієнта дисипації $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ (сірий колір) та $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ (чорний колір).

Аналіз цих графіків показує, що при значенні коефіцієнта дисипації приводу $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ амплітуда по осі абсцис має більше значення ніж при $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$, хоча характер зміни більш плавний.

Рис. 13. Графік зміни моменту у муфті $M_{\text{муф}}$ в залежності від часуРис. 14. Графічна залежність $((\phi_1 - \phi_2), (\phi_1 - \phi_2))$

Висновки. В результаті проведених досліджень з метою підвищення надійності та довговічності роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним привідним механізмом розраховано навантаження в елементах її конструкції та приводу, визначено функцію зміни необхідного крутного моменту на привідному валу кривошипа для забезпечення процесу ущільнення виробів з будівельних сумішей із врахуванням дисипації привідного механізму. Для вказаної установки визначено значення жорсткості привідного механізму, зведеної до осі обертання кривошипів, за якого спостерігаються мінімальні навантаження у муфтах привідного механізму. Проаналізовано залежність крутного моменту у муфті приводу від величини коефіцієнта дисипації, розраховано функції зміни кінематичних характеристик установки при різних значеннях коефіцієнта дисипації. Для роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним привідним механізмом із вказаними вище параметрами рекомендована величина коефіцієнта дисипації має значення в межах від $k = 1170 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ до $k = 1200 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$. Результати роботи можуть в подальшому бути корисними

для уточнення та удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку привідних механізмів машин роликівого формування як на стадіях проектування/конструювання, так і в режимах реальної експлуатації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гарнець В.М.* Прогресивні бетоноформуючі агрегати і комплекси / В.М. Гарнець – К.: Будівельник, 1991. – 144 с.
2. *Гарнець В.М.* Бетоноформувальні агрегати. Конструктивно-функціональні схеми, принципи дії, основи теорії : Монографія / В.М. Гарнець, С.В. Зайченко, Ю.В. Човнюк, В.О. Шаленко, Я.С. Приходько – К.: Інтерсервіс, 2015. – 238 с.
3. *Кузин В.Н.* Технология роликівого формования плоских изделий из мелкозернистых бетонов: автореф. дис. канд. техн. наук / В.Н. Кузин – М.: Моск. инж.-строит. ин-т. – 1981. – 20 с.
4. *Рюшин В.Т.* Исследование рабочего процесса и разработка методики расчета машин роликівого формирования бетонных смесей: дис. ... канд. техн. наук / В.Т. Рюшин – К.: Киев. инж.-строит. ин-т. – 1986.
5. *Назаренко І.І.* Основи теорії руху землерийних і ущільнювальних машин будівництва з керуваннями у часі оптимальними параметрами : Монографія / І.І. Назаренко, В.М. Смірнов, Л.Є. Пелевін, А.В. Фомін, А.Т. Свідерський, О.О. Костенюк, М.М. Ручинський, О.П. Дедов, О.М. Гаркавенко, І.Ю. Мартинок – К.: МП Леся, 2013. – 188 с.
6. *Zaichenko S.* Development of a geomechanical complex for geotechnical monitoring contour mine groove / S. Zaichenko, V. Shalenko, N. Shevchuk, V. Vapnichna // Eastern-European J. Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/9 (87). – P. 19-25. DOI: 10.155/1729-4061.2017.102067.
7. *Гарнець В.М.* Теорія і практика створення бетоноформувальних агрегатів (БФА) / В.М. Гарнець, Ю.В. Човнюк, С.В. Зайченко, В.О. Шаленко, Я.С. Приходько // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 83. – С. 49-54.
8. *Гарнець В.М.* Розробка науково-практичних рекомендацій по створенню бетоноформуючих агрегатів (БФА) / В.М. Гарнець, С.В. Зайченко, Я.С. Приходько, В.О. Шаленко // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 79. – С. 46-52.
9. *Зайченко С.В.* Енергетичний аналіз процесу роликівого ущільнення / С.В. Зайченко, С.П. Шевчук, В.М. Гарнець // Енергетика: Економіка, технологія, екологія. – 2012. – № 1 (30). – С. 77-83.
10. *Зайченко С.В.* Тривимірне моделювання процесу роликівого ущільнення стовбурного кріплення / С.В. Зайченко, С.П. Шевчук, В.М. Гарнець // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 79. – С. 40-45.
11. *Приходько Я.С.* Взаємоузгодженість роботи механізмів при роликів-екструзійному формуванні багатопустотних виробів / Я.С. Приходько, В.М. Гарнець // Галузеве машинобудування, будівництво. – 2012. – № 1 (31). – С. 305-310.
12. *Ловейкін В.С.* Динамічний аналіз роликівого формувальної установки з рекуперативним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: Пр. І-ї Міжнародної науково-технічної конференції (DSR AM-I). – Тернопіль, 2004. – С. 507-514.
13. *Ловейкін В.С.* Синтез кулачкового приводного механізму роликівого формувальної установки з комбінованим режимом руху по ускоренню третього порядку / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Международный научно-технический журнал «Наука и техника». – Минск: БНТУ, 2017. – Т. 16, № 3. – С. 206-214. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-3-206-214.
14. *Ловейкін В.С.* Визначення навантажень в елементах роликівого формувальних установок / В.С. Ловейкін, К.І. Почка. // Збірник наукових праць Української державної академії залізничного транспорту. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. – Вип. 88. – С. 15-20.
15. *Ловейкін В.С.* Аналіз нерівномірності руху роликівого формувальної установки з кривошипно-шатунним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка, Д.А. Паламарчук // Строительство. Материаловедение. Машиностроение: Сборник научных трудов «Интенсификация рабочих процессов строительных и дорожных машин. Серия: Подъемно-транспортные, строительные и дорожные машины и оборудование». – Днепропетровск: ПГСА, 2005. – № 33. – С. 157-169.
16. *Орлов И.Н.* Электротехнический справочник Т. 2. Электротехнические изделия и устройства / Под ред. профессоров МЭИ. – 7-е изд., испр. и доп. – М: Энергоатомиздат, 1986. – 712 с.
17. *Шейнблит А.Е.* Курсовое проектирование деталей машин: Учеб. пособие для техникумов / А.Е. Шейнблит – М.: Высш. шк., 1991. – 432 с.
18. *Дегтярев Ю.И.* Методы оптимизации / Ю.И. Дегтярев – М.: Советское радио, 1980. – 272 с.

19. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел – М.: Мир, 1986. – 352 с.
20. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский – М.: Наука. – 1975. – 640 с.

REFERENCES

1. *Garnc V.M.* Progresivni betonoformujuchi agregati i kompleksi (Progressive concrete the forming units and complexes) / V.M. Garnc – K.: Budivelnik, 1991. – 144 s.
2. *Garnc V.M.* Betonoformoval'ni agregati. Konstruktivno-funkci-onal'ni shemi, princip diyi, osnovi teorii: Monohrafiia (Concrete the forming units. Constructive and functional to the scheme, principle of action, theory basis: Monograph) / V.M. Garnc, S.V. Zajchenko, Ju.V. Chovnjuk, V.O. Shalenko, Ja.S. Prihodko – K.: Interservis, 2015. – 238 s.
3. *Kuzin V.N.* Tehnologija rolikovogo formovanija ploskih izdelij iz melkozernistyh betonov (Technology of roller formation of flat articles from fine-grained concrete). Avtoref. dis... kand. nauk (Abstract of the thesis of the candidate of science) / V.N. Kuzin – M.: Moscow construction institute. – 1981. – 20 s.
4. *Rjushin V.T.* Issledovanie raboche-go processa i razrabotka metodiki rascheta mashin rolikovogo formovanija betonnyh smesej (Research of working process and development of a method of calculation of cars of roller formation of concrete mixes). Dis... kandidata tehn. nauk. (Thesis of Candidate of Technical Sciences) / V.T. Rjushin – K.: Kyiv construction institute. – 1986.
5. *Nazarenko I.I.* Osnovi teorii ruhu zemlerijnih i ushhil'njuval'nih mashin budindustrii z kerovanimi u chasi optimal'nimi parametrami: Monohrafiia (Bases of the theory of the movement of the digging and condensing cars of the construction industry with the optimum parameters operated in time: Monograph) / I.I. Nazarenko, V.M. Smirnov, L.Je. Pelevin, A.V. Fomin, A.T. Sviders'kij, O.O. Kostenjuk, M.M. Ruchins'kij, O.P. Djedov, O.M. Garkavenko, I.Ju. Martinjuk – Kyiv: MP Lesja, 213. – 188 s.
6. *Zaichenko S.* Development of a geomechanic complex for geotechnical monitoring contour mine groove / S. Zaichenko, V. Shalenko, N. Shevchuk, V. Vapnichna // Eastern-European J. Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/9 (87). – P. 19-25. DOI: 10.155/1729-4061.2017.102067.
7. *Garnc V.M.* Teorija i praktika stvorennya betonoformoval'nih agregativ (BFA) (Theory and practice of creation of units of formation of concrete) / V.M. Garnc, Ju.V. Chovnjuk, S.V. Zajchenko, V.O. Shalenko, Ja.S. Prihod'ko // Girmichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2014. – Vyp. 83. – S. 49-54.
8. *Garnc V.M.* Rozrobka naukovo-praktichnih rekomendacij po stvorennyu betonoformujuchih agregativ (BFA) (Development of scientific and practical recommendations about creation of units of formation of concrete) / V.M. Garnc, S.V. Zajchenko, Ja.S. Prihod'ko, V.O. Shalenko // Girmichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 79. – S. 46-52.
9. *Zajchenko S.V.* Energetichnij analiz procesu rolikovogo ushhil'nenja (Power analysis of process of roller consolidation) / S.V. Zajchenko, S.P. Shevchuk, V.M. Garnc // Energetika: Ekonomika, tehnologija, ekologija. – 2012. – No. 1 (30). – S. 77-83.
10. *Zajchenko S.V.* Trivimirne modeljuvannja procesu rolikovogo ushhil'nenja stovburnogo kriplennja (Three-dimensional modeling of process of roller consolidation of column fastening) / S.V. Zajchenko, S.P. Shevchuk, V.M. Garnc // Girmichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 79. – S. 40-45.
11. *Prihod'ko Ja.S.* Vzajemuzgodzhenist' roboti mehanizmiv pri roliko-ekstruzijnomu formuvanni bagatopustotnih virobiv (Interconsistency of operation of mechanisms at roller and extrusive formation of multihollow products) / Ja.S. Prihod'ko, V.M. Garnc // Galuzeve mashinobuduvannja, budivnictvo. – 2012. – № 1 (31). – S. 305-310.
12. *Loveikin V.S.* Dinamichnij analiz rolikovoï formovochnoi ustanovki z rekuperacijnim privodom (The dynamic analysis of roller forming installation with the rekuperativ drive) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Dinamika, micnist' i nadijnist' sil'skogospodars'kih mashin: Pr. I-i Mizhnarodnoi naukovo-tehnicnoi konferencii (DSR AM-I) (Dynamics, durability and reliability of farm vehicles. Works of the first International scientific and technical conference (DSR AM-I)). – Ternopil', 2004. – S. 507-514.
13. *Loveikin V.S.* Sintez kulachkovogo privodnogo mehanizma rolikovoï formovochnoi ustanovki s kombinirovannym rezhimom dvizhenija po uskoreniju tret'ego porjadka (Synthesis of camshaft driving mechanism in roller molding installation with combined motion mode according to acceleration of third order) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Mezhdunarodnyj nauchno-tehniceskij zhurnal «Nauka i tehnika» (International scientific and technical magazine «Science

- & Technique»). – Minsk: Belarusian National Technical University. – Т. 16, No 3. – S. 206-214. DOI:10.21122/2227-1031-2017-16-3-206-214.
14. Loveikin V.S. Vznachennja navantazhen' v elementah rolikovih formoval'nih ustanovok (Definition of loadings in elements of roller forming installations) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Zbirnik naukovih prac' Ukraïns'koi derzhavnoi akademii zalizničnogo transportu (Collection of scientific works of Ukrainian state academy of railway transport). – Harkiv: UkrDAZT, 2008. – Vyp. 88. – S. 15-20.
 15. Loveikin V.S. Analiz nerivnomirnosti ruhu rolikovoï formovočnoï ustanovki z krivoshipno-shatunnim privodom (The analysis of unevenness of the movement of roller forming installation about a crank connecting rod the drive) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka, D.A. Palamarchuk // Stroitel'stvo. Materialovedenie. Mashinostroenie (Construction. Materials science. Mechanical engineering). Sbornik nauchnyh trudov «Intensifikacija rabochih processov stroitel'nyh i dorozhnyh mashin. Serija: Podyomno-transportnye, stroitel'nye i dorozhnye mashiny i oborudovanie» (Collection of scientific works "Intensification of working processes of construction and road cars. Series: Hoisting-and-transport, construction and road machines and equipment"). – Dnipropetrovsk: Dnieper state construction academy, 2005. – No 33. – S.157-169.
 16. Orlov I.N. Jelektrotehnicheskij spravocnik T. 2. Jelektrotehnicheskie izdelija i ustrojstva (Electrotechnical reference book of T. 2. Electrotechnical products and devices). – M.: Jenergoatomizdat, 1986. – 712 s.
 17. Shejnblit A.E. Kursovoe proektirovanie detalej mashin: Uchebnoe posobie dlja tehnikumov (Course design of details of cars: Manual for technical schools) / A.E. Shejnblit – Moscow, Vysshaja shkola, 1991. – 432 s.
 18. Degtyarev Yu.I. Metody optimizacii (Optimization methods) / Yu.I. Degtyarev – M.: Sovetskoe radio, 1980. – 272 s.
 19. Rekleytis G. Optimizacija v tehnikе. V 2-h knigah. Kniga 1. (Optimization in the equipment. In 2 books. Book 1). Translation from English / G. Rekleytis, A. Reyvdran, K. Regsdel – M.: Mir, 1986. – 352 s.
 20. Artobolevskij I.I. Teorija mehanizmov i mashin (Theory of mechanisms and cars) / I.I. Artobolevskij – M.: Nauka, 1975. – 640 s.

Стаття надійшла до редакції 1.11.2018 р.

Loveikin V.S., Pochka K.I., Romasevich Yu.O., Pochka O.B.

DYNAMIC ANALYSIS OF A ROLLER MOLDING UNIT WITH A CRANKSHAFT ACTUATOR

For the purpose of increase in reliability and durability of roller molding unit with the driving mechanism with a crank and the connecting rod loadings in elements of her design and the drive are calculated, dependences for definition of effort in the connecting rod, necessary for reduction in back and forth motion of the forming cart, and normal reactions of guides of the movement of the forming cart to the directing rollers depending on a crank angle of rotation are received. For a research of loadings the two-mass dynamic model of roller forming installation in which power and power characteristics of the driving engine and forming cart, rigidity of the driving mechanism and its dissipation are considered is used. Function of change of necessary torque for ensuring process of consolidation of products of construction mixes taking into account dissipation of the driving mechanism is defined. Rated settlement power on which the electric motor is chosen is determined by average value of the moment of forces of resistance for a cycle of turn of a crank, connecting couplings and a reducer are picked up. Using Lagrange's equation of the second sort, for the roller forming installation with the driving mechanism with a crank and the connecting rod presented by two-mass dynamic model the differential equations of the movement are worked out. As a result of a numerical experiment for roller forming installation with the driving mechanism with a crank and the connecting rod the value of the rigidity of the driving mechanism given to an axis of rotation of a crank at which the minimum loadings in couplings of the driving mechanism are observed is defined. The dependence of the moment is installed in the drive coupling from dissipation coefficient size, functions of change of kinematic characteristics of installation at different values of coefficient of dissipation are calculated. The recommended dissipation coefficient size for roller forming installation with the driving mechanism with a crank and the connecting rod is determined.

Keywords: roller molding unit, driving mechanism, effort, moment, rigidity of the drive, dissipation.

Ловейкин В.С., Почка К.И., Ромасевич Ю.А., Почка О.Б.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОЛИКОВОЙ ФОРМОВОЧНОЙ УСТАНОВКИ С КРИВОШИПНО-ШАТУННЫМ ПРИВОДНЫМ МЕХАНИЗМОМ

Для роликовой формовочной установки с возвратно-поступательным приводным механизмом рассчитаны нагрузки в элементах ее конструкции и привода, определены функции изменения необходимого крутящего момента для обеспечения процесса уплотнения изделий из строительных смесей с учетом диссипации приводного механизма. Установлена зависимость момента в муфте привода от величины коэффициента диссипации, рассчитаны функции изменения кинематических характеристик установки при различных значениях коэффициента диссипации, определены рекомендованные величины жесткости и коэффициента диссипации.

Ключевые слова: роликовая формовочная установка, приводной механизм, усилие, момент, жесткость привода, диссипация.

УДК 693.546

Ловейкін В.С., Почка К.І., Ромасевич Ю.О., Почка О.Б. **Динамічний аналіз роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним приводним механізмом** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 91-108.

Для роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним приводним механізмом розраховано навантаження в елементах її конструкції та приводу, визначено функцію зміни необхідного крутного моменту для забезпечення процесу ущільнення виробів з будівельних сумішей із врахуванням дисипації приводного механізму. Встановлено залежність моменту у муфті приводу від величини коефіцієнта дисипації, розраховано функції зміни кінематичних характеристик установки при різних значеннях коефіцієнта дисипації, визначено рекомендовані величини жорсткості та коефіцієнта дисипації.

Лл. 14. Бібліогр. 20 назв.

UDC 693.546

Loveikin V.S., Pochka K.I., Romasevich Yu.O., Pochka O.B. **Dynamic analysis of a roller molding unit with a crankshaft actuator** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 91-108.

For roller forming installation with the driving mechanism with a crank and the connecting rod loadings in elements of its design and the drive are calculated, function of change of necessary torque for ensuring process of consolidation of products of construction mixes taking into account dissipation of the driving mechanism is defined. The dependence of the moment is installed in the drive coupling from dissipation coefficient size, functions of change of kinematic characteristics of installation at different values of coefficient of dissipation are calculated, the recommended sizes of rigidity and coefficient of dissipation are determined.

Fig. 14. Ref. 20.

УДК 693.546

Ловейкин В.С., Почка К.И., Ромасевич Ю.А., Почка О.Б.

Динамический анализ роликовой формовочной установки с кривошипно-шатунным приводным механизмом // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вип. 102. - С. 91-108.

Для роликовой формовочной установки с кривошипно-шатунным приводным механизмом рассчитаны нагрузки в элементах её конструкции и привода, определена функция изменения необходимого крутящего момента для обеспечения процесса уплотнения изделий из строительных смесей с учётом диссипации приводного механизма. Установлена зависимость момента в муфте привода от величины коэффициента диссипации, рассчитаны функции изменения кинематических характеристик установки при разных значениях коэффициента диссипации, определены рекомендованные величины жёсткости и коэффициента диссипации.

Лл. 14. Библиогр. 20 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри конструювання машин і обладнання Національного університету біоресурсів і природокористування України ЛОВЕЙКІН Вячеслав Сергійович

Адреса робоча: 03041, Україна, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 12, навчальний корпус № 11, Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра конструювання машин і обладнання, ЛОВЕЇКІНУ Вячеславу Сергійовичу

Робочий тел.: +38(044) 527-87-34;

Мобільний тел.: +38(097) 349-14-53;

E-mail: lovvs@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-4259-3900>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри основ професійного навчання КНУБА ПОЧКА Костянтин Іванович

Адреса робоча: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра основ професійного навчання, ПОЧЦІ Костянтину Івановичу

Робочий тел.: +38(044) 248-69-25;

Мобільний тел.: +38(097) 212-86-29;

E-mail: shanovniv@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0355-002X>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, доцент, професор кафедри конструювання машин і обладнання Національного університету біоресурсів і природокористування України РОМАСЕВИЧ Юрій Олександрович

Адреса робоча: 03041, Україна, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 12, навчальний корпус № 11, Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра конструювання машин і обладнання, РОМАСЕВИЧУ Юрію Олександровичу

Робочий тел.: +38(044) 527-87-34;

Мобільний тел.: +38(068) 102-31-64;

E-mail: romasevichyuriv@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5069-5929>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): асистент кафедри теплогазопостачання і вентиляції КНУБА ПОЧКА Ольга Богданівна

Адреса робоча: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теплогазопостачання і вентиляції, ПОЧЦІ Ользі Богданівні

Мобільний тел.: +38(097) 196-92-04;

E-mail: zasedkoolga@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5701-978X>

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І РІВНЯННЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ ПОРОЖНИСТОГО ТІЛА ОБЕРТАННЯ – ДИСКА ПІД ДІЄЮ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

О.К. Гревцев¹,
старший науковий співробітник

Н.Ю. Селіванова²,
старший викладач

¹ДП «Державний дорожній науково-дослідний інститут імені М.П. Шульгіна»

²Національний транспортний університет

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.109-120

Розглянута просторова задача теорії термопружності та електромагнітопружності для тіла обертання, зокрема для порожнистого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами (механічні сили, які діють з боку електромагнітного поля на одиницю об'єму провідного середовища) і силами інерції. В результаті досліджень були отримані диференціальні рівняння для знаходження переміщень і рівняння вертикального руху розглянутого тіла обертання. Визначені умови руху порожнистого диска під дією власного електромагнітного імпульсного поля. Проведені дослідження пружного стану розглянутого тіла обертання. При цьому показано, що дотичні, осові і радіальні напруження в тілі порожнистого диска відсутні, тобто дорівнюють нулю. Єдине напруження, яке не дорівнює нулю, є окружне напруження. Показано, що температурне поле з'являється при виникненні пондеромоторних сил, спричинених електромагнітним полем і є результатом деформації тіла обертання порожнистого диска.

Ключові слова: термопружність, електромагнітопружність, електромагнітне імпульсне поле, осесиметричне навантаження, осесиметрична деформація, сила інерції, сили тяжіння (гравітації), пондеромоторні сили, температурне поле, релятивістська маса.

Вступ. Відомо [4, 8], що в літературі не наведено точних методів розв'язання задачі теорії пружності для тіл обертання змінної товщини. Наприклад, для тонкого диска змінної товщини, що обертається, припускають, що напруга є плоскою, граничними умовами на криволінійній поверхні нехтують в силу малої товщини [4]. Для порожнистого диска змінної товщини з осесиметричним навантаженням температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами і силами інерції – немає аналітичного методу розв'язання задачі з точки зору теорії термопружності та електромагнітопружності. А дослідження руху тіла обертання – порожнистого диска – під дією вищезазначених об'ємних сил взагалі не проводилися.

Основна частина. У запропонованій роботі розглянута просторова задача теорії пружності в циліндричних координатах для тіла обертання, зокрема для порожнистого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами без спрощених гіпотез, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності для осесиметричної деформації.

Нехай тіло обертання перебуває під дією об'ємних сил: сили гравітації (сили тяжіння) $P(t)$; пондеромоторних сил $\bar{P}(\bar{P}_r, \bar{P}_z)$ і температурного поля $\theta(r, z, t)$, а також сил інерції $(\rho u_{3,t})_t$, діючих у напрямку осі обертання OZ , [1], тут u_3 – переміщення в осьовому напрямку, ρ – щільність релятивістської маси тіла. Якщо тіло вільне від механічних зв'язків, то під дією вищеназваних сил, воно буде знаходитися в рівновазі (невагомості), коли ці сили зрівноважуються, або рухатися.

Задача визначення рівноваги або руху суцільного обмеженого середовища є комплексною задачею. Для її рішення необхідно розв'язати рівняння механіки суцільного середовища сумісно з рівняннями електродинаміки [2] і враховуючи термомеханічну взаємодію всередині середовища внаслідок деформації [3]. При дослідженні пружного стану електропровідного тіла у електромагнітному полі припускається, що тіло перебуває у магнітному полі, яке утворюється електричним током у самому тілі, де тече електричний струм і утворюються електричні заряди. Під дією власного електромагнітного імпульсного поля тіло повинно рухатися самостійно. У ланцюгу, в якому тече змінний струм за величиною і постійний за направленням, закон Ньютона не виконується (не виконуються умови рівноваги пондеромоторних сил). Ці сили і спричинятимуть рух тіла обертання – диска.

Розглянемо пружний стан і рівняння вертикального руху порожнистого диска. Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах (r, z) мають такий вигляд [6]:

в переміщеннях

$$\Delta u_1 - \frac{11}{r^2} u_1 + \frac{1}{1-2\nu} e_{,1} - 2 \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \theta_{,1} + \frac{1}{G} P_r = 0, \quad (1)$$

$$\Delta u_3 + \frac{1}{1-2\nu} e_{,3} - \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \theta_{,3} - \frac{1}{G} [P_T - P_z + (u \rho_{3,t})_t] = 0;$$

і напруженнях

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} + P_r = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{33,3} + \sigma_{13,3} + \frac{1}{r} \sigma_{13} - P_T + P_z - (\rho u_{3,t})_t = 0.$$

У рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z ; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu - оператор Лапласа від переміщень u_i ($i=1,3$); $\Delta u_i = u_{i,11} + \frac{1}{r} u_{i,1} + u_{i,33}$; $\Delta_1 u_i = u_{i,11} + \frac{1}{r} u_{i,1}$; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ – відповідно компоненти радіальної, окружної, осової і дотичної напружень; \bar{P}_r і \bar{P}_z – компоненти пондеромоторної сили \bar{P} (\bar{P}_r, \bar{P}_z) у напрямку осей

OR і OZ ; \bar{P}_T - сила тяжіння; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву (E - модуль пружності); $\theta = \theta(r, z, t) = \theta_1(r, t) + \theta_2(z, t)$ - температурне поле.

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [4]:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right), \quad ij = 1, 2, 3; \quad (3)$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11} = u_{1,1}; \quad e_{22} = \frac{1}{r} u_1; \quad e_{33} = u_{3,1}; \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \quad (4)$$

Тут σ_{ij} - символ Кронекера; α і ν - коефіцієнти теплового лінійного розширення і Пуассона $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ - об'ємне розширення.

Для замикання системи рівнянь рівноваги (1) необхідно додати рівняння теплопровідності [6]:

$$\Delta \theta + \frac{1}{\lambda} W = 0, \quad (5)$$

де W - кількість тепла, яке утворюється або поглинається одиницею об'єма тіла при його деформації; λ - коефіцієнт теплопровідності;

$$\Delta \theta = \theta_{,11} + \frac{1}{r} \theta_{,1} + \theta_{,33}.$$

Пондеромоторні сили - це механічні сили, які діють з боку електромагнітного поля на частки (одиниці об'єму) провідності середовища. Коли на тіло не накладені механічні зв'язки, які перешкоджають його руху, то під дією пондеромоторних сил воно буде знаходитися у русі при умовах $P_r \neq P_z$ і в рівновазі (невагомість тіла) при $P_r = P_z$.

В силу закону тяжіння Ньютона [5] тіло, яке знаходиться на рівні моря, притягується до Землі з силою (обертанням Землі зневажаємо):

$$P_T(0) = m_0 g_0 = \gamma \frac{M m_0}{R^2}, \quad \gamma M = g_0 R^2, \quad (6)$$

де M і R - маса і радіус Землі; m_0 - маса тіла у стані спокою; g_0 - прискорення вільного падіння тіла на рівні моря.

При віддаленні від поверхні Землі маємо

$$P_T(t) = m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)},$$

$$g(t) = g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}, \quad (7)$$

де $Z(t)$ - відстань від центра Землі до початку координат системи (r, z) , яка зв'язана з тілом обертання - полим диском. З Землею зв'язана система координат (r', z') (рис. 1).

З формули (7) бачимо, що сила тяжіння P_T і прискорення вільного падіння g_0 змінюється з висотою. Силу тяжіння можна записати для одиниці об'єма однорідного тіла обертання у наступному вигляді:

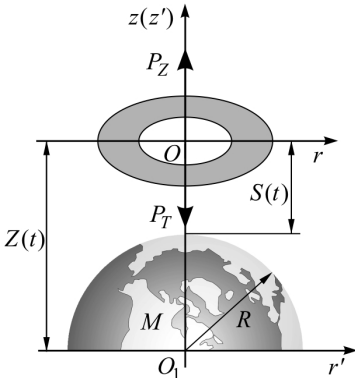


Рис. 1

$$P_T(t) = \rho_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)},$$

$$F_t(t) = V_0 \rho_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}, \quad (8)$$

де $P_T(t) = V_0 F_t(t)$, $m_0 = \rho_0 V_0$ (V_0 - об'єм тіла в стані спокою).

У початковий момент часу $t = 0$, диск знаходиться у поверхні Землі, тобто $Z(0) = R$. Тоді $P_T(0) = \rho_0 g_0$, $F_t(0) = V_0 \rho_0 g_0 = m_0 g_0$ і сила тяжіння дорівнює його вазі.

Нехай диск рухається вертикально вгору у напрямку осі обертання OZ і не чинить рух в горизонтальній площині OR , тобто дотично до Землі. Вертикальна складова пондеромоторної сили P_z буде знайдена з рівнянь Максвелла [7].

Припустимо, що у природному стані, коли ще немає деформацій і напружень, має місце рівняння рівноваги сил:

$$P_T - P_z = 0,$$

Тобто пондероморна сила P_z урівноважує силу тяжіння диска на одиницю об'єма P_T для кожної точки тіла. Але за цих умов, у зв'язку з появою пондеромоторної сили $\bar{P}(\bar{P}_r; \bar{P}_z)$, може з'явитися температурне поле $\theta(r, z, t)$ і горизонтальна складова пондероморної сили P_r , які викликать напружений стан тіла обертання - диска і в умовах рівноваги.

Розглянемо аксіальне тіло обертання, зокрема порожнистий диск змінної товщини симетричний відносно площин $Z = 0$ і $R = 0$ для системи координат пов'язаної з диском. Чверть диска (через осьову симетрію) показана на рис. 2.

Тут P_z - вертикальна складова пондеромоторної сили; P_T - сила тяжіння; $l_1(z)$ і $l_2(z)$ - рівняння внутрішньої та зовнішньої поверхонь диску; $h_1(r)/2$

і $h_2(r)/2$ - внутрішня і зовнішня довжина порожнини диска.

Пропонований метод рішення систем рівнянь рівноваги (1) і (2) засновано на поступальних наближеннях розв'язання при задовільненні граничних умов (9). Докладно метод рішення диференціальних рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності був наведений у статтях [9, 10, 11, 12]. Знайдени

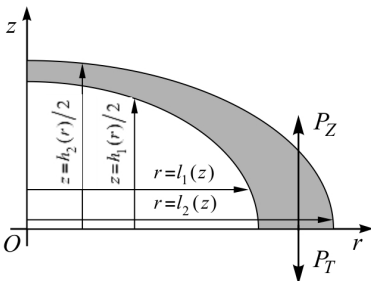


Рис. 2

радіальні переміщення $u_1(r, z, t)$ і осьові переміщення $u_3(r, z, t)$ переміщення, які перетворюють систему рівнянь (1) на тотожності і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_1(r, z, t) &= u(r, t) - \frac{z^2}{2} \left[\frac{\nu}{2G} P_r(r, t) + (1 + \nu) \alpha \theta_{1,1} \right], \\ u_3(r, z, t) &= z(t) - \frac{\nu}{1 - \nu} z \frac{1}{r} (ur)_{,1} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{z^3}{6} \times \\ &\times \left[\frac{\nu}{2G} \Delta_1 P_r + (1 + \nu) \alpha \Delta_1 \theta_{1,1} \right] + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \int_0^z \theta(r, z, t) dz, \end{aligned} \quad (9)$$

де $u(r, t)$ - радіальне переміщення точок в серединній площині $z = 0$, $z(t)$ - функція інтегрування, яка характеризує відстань від центра Землі до площини диска $z = 0$, як абсолютно жорсткого тіла (точки).

Розв'язання диференціальних рівнянь показало, що осьові та дотичні напруження у тілі диска всюди дорівнюють нулю. При цьому були отримані диференціальні рівняння для визначення радіального переміщення $u(r, t)$, температурного поля $\theta_1(r, t)$, радіальної складової пондеромоторної сили $P_r(r, t)$, а також рівняння руху:

$$P_T(t) - P_z(t) + (\rho u_{3,t})_{,t} = 0.$$

Радіальну складову пондеромоторної сили представимо у вигляді:

$$P_r(r, t) = P_{1,1}(r, t) = P_0(t)r, \quad (10)$$

яка точно задовільняє рівняння $(\Delta_1 P_1)_{,1} = 0$.

Розв'язуючи рівняння $(\Delta_1 \theta_1)_{,1} = 0$, отримаємо температурне поле у радіальному напрямку:

$$\theta_1(r, t) = B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ln r + B_3, \quad (11)$$

де B_1, B_2 і B_3 - довільні сталі інтегрування.

Знаходимо радіальне переміщення $u(r, t)$ точок площини $z = 0$ з рівняння:

$$\left[\frac{1}{r} (u, r)_{,1} \right]_{,1} = (1 + \nu) \alpha \theta_{1,1}(r, z) - \frac{1 - \nu}{2G} P_{1,1}(r, t).$$

Звідси $u(r, t)$ дорівнює:

$$u(r, t) = (1 + \nu) \alpha \left[B_1 \frac{r^3}{16} + B_2 \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) - \frac{1 - \nu}{2G} P_0(t) \frac{r^3}{8} + A_1 \frac{r}{2} + A_2 \frac{1}{r} \right], \quad (12)$$

де A_1 і A_2 - довільні сталі інтегрування.

Рівняння руху може бути записано у такому вигляді:

$$(\rho u_{3,t})_{,t} = P_T(t) - P_z(t),$$

або, з урахуванням виразу сили тяжіння на одиницю об'єма (8):

$$(\rho u_{3,t})_{,t} = \rho_0 g_0 \frac{R^2}{z^2(t)} - P_z(t). \quad (13)$$

Для розв'язання цього рівняння треба знати величину осевого переміщення $u(r, t)$ і значення вертикальної складової пондеромоторної сили $P_z(t)$.

Нехай в початковий момент часу $t=0$ диск перебуває у стані рівноваги на поверхні Землі. У цьому разі відстань $Z(t)$ від центра Землі дорівнює $Z(0)=R$. Отже, сила тяжіння одиниці об'єма тіла $P_T(0)=\rho_0 g_0$ урівноважується під'ємною силою - вертикальною складовою пондеромоторної сили $P_z(0)$. Таким чином маємо умову невагомості диска:

$$P_T(0) - P_z(0) = 0.$$

Для радіальних напружень σ_{11} із закону Гука (3) з урахуванням (10), (11) і виразу $\theta(r, z, t) = \theta_1(r, t) + \theta_2(z, t)$ отримаємо:

$$\sigma_{11} = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ (1+\nu)\alpha \left[B_1 \frac{3+\nu}{16} + B_2 \left(\frac{1+\nu}{2} \ln r + \frac{1-\nu}{4} \right) \right] - \frac{1-\nu}{2G} P_0 \frac{3+\nu}{8} r^2 + A_1 \frac{1+\nu}{2} - A_2 \frac{1-\nu}{r^2} - (1-\nu^2)\alpha \frac{z^2}{2} B_1 - (1+\nu)\alpha \left[B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ln r + B_3 + \theta_2(z, t) \right] \right\}. \quad (14)$$

Граничні умови для порожнистих тіл обертання будуть такими [8]:

$$\begin{aligned} P_{ir} &= \sigma_{11} \cos \varphi_i + \sigma_{13} \sin \varphi_i, \\ P_{iz} &= \sigma_{13} \cos \varphi_i + \sigma_{33} \sin \varphi_i, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

де P_{ir} і P_{iz} - проєкції інтенсивності поверхневих навантажень на відповідні напрямки

$$\cos \varphi_i = \frac{f_{i,1}}{|\bar{n}_i|}, \quad \sin \varphi_i = \frac{f_{i,3}}{|\bar{n}_i|}, \quad [\bar{n}_i(f_{i,1}; f_{i,3})].$$

Тут \bar{n}_i - нормаль до поверхонь тіла обертання, φ_i - кут між нормаллю і напрямками координатних осей, f_i - неявне рівняння ліній профілю граничних поверхонь порожнистого диска.

Через рівність нулю напружень σ_{13} і σ_{33} граничні умови (15) спрощуються і, в разі відсутності поверхневих навантажень $P_{ir} = P_{iz} = 0$ на

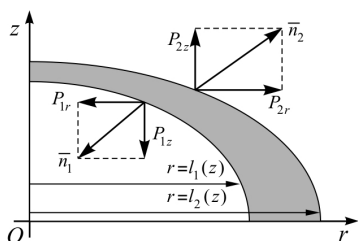


Рис. 3

криволінійних внутрішній та зовнішніх поверхнях порожнистого диска, набувають такого вигляду (рис. 3) $\sigma_{11} = 0$ при $r = l_2(z)$ і $\sigma_{11} = 0$ при $r = l_1(z)$, де $l_1(z)$, $l_2(z)$ - рівняння профілю внутрішньої та зовнішньої поверхонь порожнистого диска.

Виконуючи граничну умову для зовнішньої поверхні диска, отримаємо:

$$(1+\nu)\alpha \left[B_1 \frac{3+\nu}{16} l_2^2 + B_2 \left(\frac{1+\nu}{2} \ln l_2 + \frac{1-\nu}{4} \right) - \frac{1-\nu}{2G} P_0 \frac{3+\nu}{8} l_2^2 + A_1 \frac{1-\nu}{l_2^2} - \right.$$

$$-(1-\nu^2)\alpha \frac{z^2}{2} \left(B_1 \frac{1}{2} - B_2 \frac{1}{l_2^2} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{2G} \frac{z^2}{2} P_0 - \nu(1+\nu)\alpha B_1 \frac{z^2}{2} - \\ -(1+\nu)\alpha \left[B_1 (l_2^2/4) + B_2 \ln l_2 + B_3 + \theta_2(z,t) \right] = 0. \quad (16)$$

Функція $\theta(z,t)$ може бути отримана з рівняння (16). Виключаючи з формули для напружень (14) цю функцію за допомогою (16), отримуємо:

$$\sigma_{11} = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ (1+\nu)\alpha \left[B_1 \frac{3+\nu}{16} (r^2 + l_2^2) + B_2 \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{r}{l_2} \right] - \frac{1-\nu}{2G} P_0 \frac{3+\nu}{8} (r^2 - l_2^2) - \right. \\ \left. - A_2 (1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) + (1-\nu^2)\alpha B_2 \frac{z^2}{2} r^2 - l_2^2 \right\} - (1+\nu)\alpha \left(B_1 \frac{r^2 - l_2^2}{4} + B_2 \ln \frac{r}{l_2} \right). \quad (17)$$

Як бачимо з (17), при $r = l_2$ напруження σ_{11} дорівнюють нулю.

Виконуємо граничну умову на поверхні порожнини диска і отримуємо:

$$(1+\nu)\alpha \left[B_1 \frac{3+\nu}{16} (l_1^2 + l_2^2) + B_2 \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{l_1}{l_2} \right] - \frac{1-\nu}{2G} P_0 \frac{3+\nu}{8} (l_1^2 - l_2^2) - A_2 (1-\nu) \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) + \\ + (1-\nu^2)\alpha B_2 \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) - (1+\nu)\alpha \left(B_1 \frac{l_2^2 - l_1^2}{4} + B_2 \ln \frac{l_1}{l_2} \right) = 0. \quad (18)$$

Це рівняння можливе, якщо покласти

$$B_2 = 0 \text{ і } A_2 = 0. \quad (19)$$

Для B_1 отримуємо з (18):

$$B_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{P_0}{G\alpha}. \quad (20)$$

Підставляючи в рівняння (17) значення (19) і (20), отримуємо те, що $\sigma_{11} = 0$ всюди у тілі порожнистого диска.

Знаходимо $\theta_2(z,t)$ з (16) з урахуванням значень (19) та (20) і покладаючи $B_3 = 0$

$$\theta_2(z,t) = \frac{3}{4} \frac{P_0(t)}{G\alpha} z^2 + \frac{A_1(t)}{2\alpha}. \quad (21)$$

Для температурного поля $\theta(r,z,t)$ отримуємо:

$$\theta(r,z,t) = \theta_1(r,t) + \theta_2(z,t) = B_1 \frac{r^2}{4} + \theta_2(z,t) = \frac{P_0(t)}{4G\alpha} \left(-\frac{3+\nu}{1+\nu} r^2 + 3z^2 \right) + \frac{A_1(t)}{2\alpha}. \quad (22)$$

Підставляючи значення (22) у рівняння теплопровідності (5), знаходимо потужність стоку тепла одиницею об'єму тіла диска:

$$W = \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\lambda P_0(t)}{2G\alpha}, \quad (23)$$

який зникає при $P_0 = 0$, тобто після припинення дії пондеромоторної сили.

Знаходимо радіальне переміщення $u(r,t)$ точок площини $Z = 0$ з рівняння (12), враховуючи формули (19) і (20),

$$u(r, t) = -\frac{P_0(t)}{4G}r^3 + A_1 \frac{r^2}{2}. \quad (24)$$

Далі знаходимо значення переміщень $u_1(r, z, t)$ і $u_3(r, z, t)$ з (9), урахувавши вирази (10), (11), (20), (22), (24), а також залежності

$$\begin{aligned} \Delta_1 P_r &= 2P_0 \text{ і } \Delta_1 \theta_1 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{P_0}{G\alpha}; \\ u_1(r, z, t) &= \frac{P_0(t)}{4G}(3rz^2 - r^3) + A_1 \frac{r}{2}, \\ u_3(r, z, t) &= z(t) + \frac{P_0(t)}{4G}(z^3 - 3r^2z) + A_1 \frac{z}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Звідси визначаємо компоненти переміщень у координатній площині тіла обертання – порожнистого диска $Z = 0$:

$$\begin{aligned} u_1(r, 0, t) &= \frac{P_0(t)}{4G}r^3 + A_1 \frac{r}{2}, \\ u_3(r, 0, t) &= z(t), \end{aligned} \quad (26)$$

де $Z(t)$ - відстань від початку координат системи (o', r', z') , пов'язаною з центром Землі до початку координат системи (o, r, z) , пов'язаною з тілом обертання. У цьому випадку бачимо, що рух диска можна розглядати як рух точки - початку координат, пов'язаної з тілом (але не з центром його ваги).

Дійсно при:

$$\begin{aligned} r = 0, \quad z = 0: \\ u_1(0, 0, t) &= 0, \\ u_3(0, 0, t) &= z(t). \end{aligned} \quad (27)$$

За початковий час $t=0$ прийнято такий стан тіла, коли воно знаходиться у невагомості на поверхні Землі і його рух відсутній:

$$z(t)|_{t=0} = R; \quad P_T(0) - P_Z(0) = 0.$$

За переміщеннями (25) знаходимо із закона Гука окружне напруження σ_{22} , яке єдине не дорівнює нулю:

$$\sigma_{22} = P_0(t)r^2. \quad (28)$$

Оскільки складова радіальної пондеромоторної сили $P_r(r, t) = P_0r$ виникає не у початковий момент часу $t=0$, коли диск перебуває у невагомості на поверхні Землі, але ще не рухається, а раніше при появі електричного поля у силовому кільці тіла обертання. У цьому випадку з'являється пондеромоторна сила, а ще раніше, коли $P_r = P_z = 0$ і $P_0 = 0$, пружний стан тіла був відсутній і було відсутнє поле (22) і тіло мало початкову температуру: $\theta(r, z) = A_1/2\alpha$, урахувавши, що $A_1 = \text{const} (\approx 20^\circ \text{C})$.

Таким чином, бачимо, що температурне поле $\theta(r, z, t)$ з'явилося як наслідок виникнення пондеромоторної сили, викликаного електромагнітним полем, і є результатом деформації тіла обертання – порожнистого диска.

Зі спеціальної теорії відносності [13] відомо, що щільність релятивістської маси ρ пов'язана з щільністю маси, яка перебуває у спокої ρ_0 залежністю:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (29)$$

і формулою аналогічною для маси:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad m_0 = \rho_0 V_0. \quad (30)$$

Тут m_0 - маса тіла у системі відліку, відносно якої воно перебуває у стані спокою (r, z) . Ця величина називається власною масою або масою спокою. Величина m - є маса того самого тіла у системі відліку (r', z') , відносно якої воно рухається зі швидкістю v_z . Ця величина називається релятивістською масою, c - швидкість світла; V - об'єм тіла у стані спокою.

В силу малоістотності переміщень точок самого тіла обертання відносно координатної системи (r, z) , яка жорстко пов'язана з тілом, для нормального переміщення u_3 маємо:

$$u_3 \approx Z(t)$$

і для швидкості тіла отримаємо:

$$u_3 \approx Z_{1t}(t) = V_z.$$

Перемножуючи рівняння руху диска

$$P_r(t) - P_z(t) + (\rho_{3,t})_{,t} = 0$$

для одиниці об'єма на об'єм покоя V_0 , отримуємо:

$$V_0 (\rho v_z)_{,t} = V_0 P_z(t) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}, \quad (31)$$

$$\rho V_0 = \frac{\rho_0 V_0}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} = m$$

і рівняння вертикального руху тіла, як точки, набуває вигляду:

$$(m v_z)_{,t} = V_0 P_z(t) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}. \quad (32)$$

Коли тіло рухається зі швидкістю значно меншою, ніж швидкість світла $V \ll c$, то $m = m_0$ і будемо мати для прискорення:

$$a_z = v_{z,t} = \frac{V_0}{m_0} P_z(t) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}. \quad (33)$$

Висновки. Розглянуто напружено-деформований стан та рівняння вертикального руху тіла обертання – порожнистого диска під дією температурного поля та об'ємних сил. Коли на диск не накладені механічні в'язі, які перешкоджають його руху, то під дією пондеромоторних сил він рухатиметься, якщо сила тяжіння не дорівнюватиме пондеромоторній силі і в рівновазі (невагомість тіла), коли вони будуть рівними. Отримані рішення

свідчать про те, що дія пондеромоторних сил приводить до появи температурного поля, яке є результатом дослідження розглянутого тіла обертання. Для визначення прискорення і швидкості порожнистого диска, який рухається, необхідно знати конкретний вираз для вертикальної складової пондеромоторної сили, яка буде знайдена з розв'язку рівнянь Максвелла і буде запропонована в наступному дослідженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Партон В.З., Перльї П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 428 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – т. I. – 483 с.
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
4. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560с.
5. *Яворский Б.М., Пинский А.А.* Основы физики. – М.: Наука, 1981. –т.1 –396с.
6. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными полями. – М.: Физматгиз, 1982. – 167с.
7. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Физматгиз, 1982. –т.1 –411с.
8. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 501с.
9. *Рябов А.Ф., Федоренко Ю.М.* Об одном методе решения задачи теории упругости для тел вращения // Мат. методы и физико-механические поля. – 1988. – Вып. 28. – с. 58 – 62.
10. *Гревицев А.К.* Решение задачи термоупругости для вращающихся аксиальных тел переменной толщины // Строительство и архитектура. Новосибирск, 1991. – №4. – с.33 – 37.
11. *Гревицев О.К.* Про один метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітого обертowego диска змінної товщини //Опір матеріалів і теорія споруд. – 1998. – Вип. 64. – С. 76-86.
12. *Гревицев О.К., Харченко С.З.* Про один метод розв'язання температурної задачі теорії термопружності для нерівномірно нагрітих тіл обертання// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2003. – Вип. 73. – С. 65-72.
13. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1961. – 292 с.

REFERENCES

1. *Parton V., Pearlyi P.* Metodyi matematicheskoy teorii uprugosti (Methods of the mathematical theory of elasticity). - M.: Nauka, 1981. - 428 p.
2. *Sedov L.* Mehanika sploshnoy sredy (Continuum Mechanics). - M.: Science, 1976. - Vol. I. - 483 p.
3. *Germain P.* Kurs mehaniki sploshnyh sred (Course in the mechanics of continuous media). - Moscow: Higher School, 1983. - 399 p.
4. *Timoshenko S., Goudier J.* Teoria uprugosti (Theory of Elasticity). - Moscow: Nauka, 1979. - 560 p.
5. *Yavorsky B., Pinsky A.* Osnovy fiziki (Basics of physics). - Moscow: Nauka, 1981.-1. -396с.
6. *Melan E., Parkus G.* Temperaturnye napriazhenia, vyzvaemye stacionarnymi potokami (Temperature stresses caused by stationary fields). - Moscow: Fizmatgiz, 1982. – 167 s.
7. *Saveliev I.* Kurs obschey fiziki (The course of general physics). - Moscow: Fizmatgiz, 1982. - Vol.1 -411s.
8. *Timoshenko S.* Kurs teorii uprugosti (Course of the theory of elasticity). - K.: Naukova Dumka, 1972. - 501s.
9. *Ryabov A., Fedorenko Y.* Ob odnom metode reshenia zadachi teorii uprugosti dlia tel vraschenia (A method for solving the elasticity problem for bodies of revolution, Mat. methods and physical-mechanical fields). - 1988. - Issue. 28. - p. 58 - 62.
10. *Grevtsev A.* Reshenie zadachi termouprugosti dlya vraschaischihsia aksial'nyh tel peremennoy tolschiny (Solution of the problem of thermoelasticity for rotating axial bodies of variable thickness). // Construction and architecture. Novosibirsk, 1991. - № 4. - p.33 - 37.
11. *Grevtsev A.* Pro odyn metod rozv'iazannia osesymetrychnoi zadachi teorii pruzhnosti dlia nerivnomirno nagrītogo obertovogo dyska zminnoi товщини (About one method of solving an axisymmetric problem of elasticity theory for an unevenly heated rotating disk of variable thickness). // Resistance of materials and theory of structures. - 1998. - Vip. 64. - P. 76-86.
12. *Grevtsev A., Kharchenko S.* Pro odyn metod rozv'iazannia osesymetrychnoi temperaturnoi zadachi teorii termopruzhnosti dlia nerivnomirno nagrītih til obertannia (About one method for solving the temperature problem of the theory of thermoelasticity for unevenly heated bodies of rotation). // Resistance of materials and theory of constructions. - 2003. - V. 73. - P. 65-72.

13. *Madelung E.* Matematicheskii apparat fiziki (Mathematical apparatus of physics). - Moscow: Fizmatgiz, 1961. - 292 p.

Стаття надійшла до редакції 12.03.2018 р.

Grevtsev O., Selivanova N.

STRESS-STRAIN STATE AND EQUATION OF THE VERTICAL MOVEMENT OF THE CORED BODY OF ROTATION – DISC UNDER ELECTROMAGNETIC FIELDS

Investigated the problem of the theory of thermoelasticity and electromagnetoelasticity for solid of revolution, in particular a cored disk of variable thickness, loaded by an axisymmetric temperature field and volume forces: gravity forces, ponderomotive forces (mechanical forces acting per unit volume of the conducting medium) and inertia forces is considered.

The problem of determining the equilibrium or motion of a continuous bounded medium is a complex problem. For solving it is necessary to first solve the equations mechanics of continue together with the equations of electrodynamics into account the thermomechanical interaction of the environment as a result the deformation. While investigating the stress state of an electrically conductive body in an electromagnetic field, it is assumed that the body is in a magnetic field created by an electric current in the body itself, where an electric current flows and electric charges are generated. Under the influence of its own electromagnetic impulse field, the body must move independently. In circuits in which an alternating current flows in magnitude and constant in direction, Newton's law is not valid (the equilibrium condition of the ponderomotive forces the mechanical forces acting on the body from the side of the electromagnetic field). These forces will also cause the motion of the body of revolution.

As a result of the research, differential equations were obtained for the determination of displacements and the equation for the vertical motion of a body of revolution of variable thickness.

The conditions for the movement of the cored disk under the action of its own electromagnetic pulse field are determined. The stress state of the rotating body is investigated. It was shown that the tangential, axial and radial stresses in the body of the cored disk are absent, that is they are equal to zero. The only voltage other than zero is the circumferential tension. It is shown that the temperature field appears when the ponderomotive forces caused by the electromagnetic field arise and is the result of deformation of the body of rotation - a cored disc.

Key words: thermoelasticity, electromagnetoelasticity, electromagnetic impulse field, axisymmetric stress, axisymmetric deformation, inertia force, gravity force, ponderomotive forces, temperature field, relativistic mass.

Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю.

УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И УРАВНЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ - ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрена пространственная задача теории термоупругости и электромагнитоупругости для тел вращения, в частности полого диска переменной толщины, нагруженного осесимметрично температурным полем и объемными силами: силами тяжести, пондоромоторными силами (механические силы, действующие со стороны электромагнитного поля на единицу объема проводящей среды) и силами инерции. В результате исследований были получены дифференциальные уравнения для определения перемещений и уравнения вертикального движения. Определены условия движения полого диска под действием собственного электромагнитного импульсного поля. Проведено исследование напряженного состояния рассматриваемого тела вращения. При этом показано, что касательные, осевые и радиальные напряжения в теле полого диска отсутствуют, т.е. равны нулю. Единственным напряжением, отличным от нуля, будет окружное напряжение. Показано, что температурное поле появляется при возникновении пондоромоторных сил, вызванных электромагнитным полем, и является результатом деформации тела вращения – полого диска.

Ключевые слова: термоупругость, электромагнитоупругость, электромагнитное импульсное поле, осесимметричная нагрузка, осесимметричная деформация, сила инерции, силі тяжести (гравитации), пондоромоторные силы, температурное поле, релятивистская масса.

УДК 539.3

Гревец О.К., Селіванова Н.Ю. Напружено-деформований стан і рівняння вертикального руху порожнистого тіла обертання – диска під дією електромагнітних полів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 109-120.

Розглянута просторова задача термопружності та електромагнітопружності для тіла обертання, зокрема для полого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами і силами інерції. Були отримані диференціальні рівняння для знаходження переміщень і рівняння вертикального руху розглянутого тіла обертання. Визначені умови руху полого диска під дією власного електромагнітного імпульсного поля. Проведені дослідження пружного стану розглянутого тіла обертання.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 13 назв.

UDC 539.3

Hrevtsev O., Selivanova N. Stress-strain state and equation of the vertical movement of the cored body of rotation – disc under electromagnetic fields // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 109-120. - Ukr.

The spatial problem of thermoelasticity and electromagnetic elasticity for a body of rotation is considered, in particular for a hollow disk of variable thickness, loaded axially by a temperature field and volumetric forces: gravity, ponderomotive forces and forces of inertia. Differential equations were obtained for finding displacements and the equation of the vertical motion of the considered body of rotation. The conditions of the motion of a hollow disk are determined under the action of their own electromagnetic pulsed field. The study of the elastic state of the considered body of rotation has been carried out.

Табл. 0. Fig. 3. Ref. 13.

УДК 539.3

Гревец А.К., Селиванова Н.Ю. Напряженно-деформированное состояние и уравнение вертикального движения полого тела вращения - диска под действием электромагнитных полей // Сопроотивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 012. - С. 109-120.

Рассмотрена пространственная задача термоупругости и электромагнитоупругости для тела вращения, в частности для полого диска переменной толщины, нагруженного осесимметрично температурным полем и объемными силами: силами тяжести, пондеромоторными силами и силами инерции. Были получены дифференциальные уравнения для нахождения перемещений и уравнения вертикального движения рассматриваемого тела вращения. Определены условия движения полого диска под действием собственного электромагнитного импульсного поля. Проведены исследования упругого состояния рассматриваемого тела вращения.

Табл. 0 Ил. 3. Библиогр. 13 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): Старший науковий співробітник Державного підприємства «Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна» ГРЕВЦЕВ Олексій Кімович

Адреса робоча: 03113, Україна, м. Київ, пр. Перемоги, 57, ГРЕВЦЕВУ Олексію Кімовичу

Робочий тел.: +38 044 242 75 96

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): Старший викладач Національного транспортного університету, СЕЛІВАНОВА Нінель Юріївна

Адреса робоча: 01010, Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, СЕЛІВАНОВИЙ Нінель Юріївні

Робочий тел.: +38 044 280 38 19

Мобільний. тел.: +38 063 315 65 87

E-mail: nel_s@i.ua

УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

КОЛИВАННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ: БЕЗПЕЧНИЙ ДІАПАЗОН ШВИДКОСТЕЙ

О.В. Сафронов¹,

д-р техн. наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, ст. наук. сп.

Б.Й. Семон¹,

д-р техн. наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України

О.М. Неділько¹,

канд. техн. наук, доцент, пров. наук. сп.

А.О. Горіна²,

канд. архітектури, ст. викладач кафедри основ архітектури та архітектурного проектування

¹*Національного університету оборони України ім. Івана Черняховського, м. Київ*²*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.121-138

В статті, на основі рівняння Бернуллі для стислого газу, оцінки зміни характеристик надзвукового потоку в течії Прандтля-Майєра та гіпотези “динамічного скривлення” аеродинамічного профілю, встановлені закономірності взаємодії стрибків ущільнення з кутковою швидкістю коливань аеродинамічних поверхонь управління. Встановлені закономірності пояснюють причину виникнення збуджуючих сил і шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь управління надзвукових літаків і аеродинамічних систем на транзвукових швидкостях польоту.

На базі встановлених закономірностей взаємодії стрибків ущільнення з кутковою швидкістю коливання аеродинамічних поверхонь управління отримані математичні моделі оцінки величин збуджуючих сил і збуджуючих шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь управління.

Ключові слова: математична модель, транзвуковий флатер, аеродинамічний профіль, аеродинамічна поверхня керування, стрибки ущільнення, транзвуковий потік, число M польоту, тиск місцевого надзвукового потоку, збуджений шарнірний момент.

Постановка проблеми. Забезпечення безпеки польотів надзвукових літаків та аерокосмічних систем у транзвуковому діапазоні чисел M польоту досі залишається актуальною науковою і прикладною проблемою. Це обумовлено особливостями обтікання аеродинамічних поверхонь неоднорідним (транзвуковим) потоком повітря і пов'язано з виникненням на цих режимах польоту різноманітних явищ аеропружності. До таких явищ можна віднести:

- збільшення згинальних моментів несучих аеродинамічних поверхонь;
- збільшення статичних шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування;
- виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У праці [1], яка присвячена дослідженням коливань аеродинамічних поверхонь керування літаків на транзвукових швидкостях польоту, розглянуто три типа коливань:

- тип «А» - коливання аеродинамічних поверхонь керування, які обумовлені відривом прикордонного шару за стрибками ущільнення і які

спостерігаються в експериментальних дослідженнях на великих кутах атаки і при відсутності стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю;

- тип «В» - коливання аеродинамічних поверхонь керування, які обумовлені особливостями їх взаємодії зі стрибками ущільнення і спостерігаються в експериментальних дослідженнях на тонких симетричних аеродинамічних профілях, які розташовані у трансзвуковому потоці повітря під нульовим кутом атаки;

- тип «С» - коливання аеродинамічних поверхонь керування при невеликих надзвукових швидкостях польоту.

Зауважимо, що до найбільш небезпечних явищ аеропружності необхідно віднести коливання аеродинамічних поверхонь керування типу «В», виникнення яких неодноразово закінчувалося руйнацією елементів конструкції літаків і, у першу чергу, елементів конструкції аеродинамічних поверхонь керування.

У деяких працях [2, 3] цей тип коливань аеродинамічних поверхонь керування має назву «трансзвуковий» (одноступеневий) флатер, оскільки виникнення цього типу коливань можливо при наявності лише однієї ступені свободи, наприклад, при наявності лише крутильних коливань аеродинамічної поверхні керування.

Теоретичним та експериментальним дослідженням цього явища присвячено багато публікацій, в яких запропоновані різноманітні підходи для обґрунтування причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування сучасних надзвукових літаків, умови їх виникнення, вплив різноманітних факторів на рівень коливань [3–7].

За результатами льотних та лабораторних досліджень [3–7], виникнення трансзвукового флатеру спостерігається у вузькому діапазоні чисел M польоту, частоти коливань дорівнюють частотам власних пружних коливань аеродинамічних поверхонь керування у наземних умовах, рівень коливань збільшується зі збільшенням швидкісного напору або зі зменшенням висоти польоту.

Відмічено, що рівень цих коливань залежить від великої кількості параметрів, до основних з яких віднесені: число M потоку повітря; геометричні характеристики аеродинамічних поверхонь, частота їх власних пружних коливань та масово-інерційні характеристики [1].

У деяких працях відмічений вплив стрибків ущільнення на виникнення коливань аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря.

Так, у праці [8] відмічено, що: «Стрибок ущільнення є основною причиною різкого зниження межі флатеру на режимі трансзвукових швидкостей», але теоретичного обґрунтування цього припущення у праці не наведено.

У праці [9] вказано, що «Ударні хвилі не виникають в деякій визначеній точці профілю, вони коливаються з великою частотою між двома можливими положеннями рівноваги».

Але досі не розроблені загально прийняті математичні моделі, якими можна описати процеси, що відбуваються при виникненні коливань аеродинамічних поверхонь керування на цих режимах польоту [1].

Мета статті. Визначити безпечний діапазон трансзвукових чисел M польоту, в якому виникають інтенсивні коливання аеродинамічних поверхонь керування (тип «В»), з метою підготовки рекомендацій льотному складу щодо особливостей керуваннями надзвуковими літаками у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту.

Виклад основного матеріалу. Аналіз режимів польоту, на яких спостерігалось виникнення трансзвукового флатеру, свідчить, що більша частина випадків руйнації елементів конструкцій аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків припадає на етап зменшення швидкості польоту літаків з надзвукової до дозвуковою. Тому виникає необхідність теоретичного обґрунтування цього явища.

Вище було відмічено, що однією з причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування типу «В» є особливості їх взаємодії зі стрибками ущільнення. Ці особливості і будуть використані для визначення безпекового діапазону трансзвукових чисел M польоту надзвукових літаків та аерокосмічних систем.

Аналіз особливостей обтікання аеродинамічних профілів трансзвуковим потоком повітря почнемо з аналізу рівняння (теорема) Гюгоньо [9]

$$(M^2 - 1) \frac{dV}{V} = \frac{dS}{S}, \quad (1)$$

де M - число M надзвукового або дозвукового потоку повітря; V – швидкість надзвукового або дозвукового потоку повітря; S - площа перетину трубки току повітря або площа перетину сопла.

З аналізу рівняння (1) випливає, що швидкість дозвукового потоку збільшується, якщо зменшується площа перетину трубки току повітря або площа перетину сопла. А швидкість надзвукового струму збільшується, якщо площа перетину трубки току повітря або площа перетину сопла збільшується. Тобто, у конфузорній частини аеродинамічного профілю число M збільшується до числа $M = 1,0$ і далі залишається незмінним при збільшенні числа M незбудженого дозвукового потоку повітря (M_∞) від критичного числа M аеродинамічного профілю ($M_{кр}$) до числа $M_\infty = 1,0$.

Цей ефект має назву «закон стабілізації місцевих чисел M » [10].

У дифузорній частини аеродинамічного профілю, тобто, коли $\frac{dS}{S} > 0$, швидкість місцевого надзвукового потоку збільшується, тому збільшується і число M місцевого надзвукового потоку. Причому, максимальна величина числа M місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю має обмеження, які обумовлені геометричними характеристиками аеродинамічного профілю та максимальним адіабатичним розширенням місцевого надзвукового потоку.

Геометричне обмеження максимальної величини числа M місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю обумовлено максимальним кутом відхилення надзвукового потоку навколо випуклої поверхні (течія Прандтля-Майєра) і може бути визначена відомою наближеною залежністю [3]

$$M_1 \approx \sqrt[3]{1 + 11,5\varphi(x)}, \quad (2)$$

де M_1 - число M місцевого надзвукового потоку на поверхні профілю; $\varphi(x)$ - кут відхилення надзвукового потоку у дифузійній частині аеродинамічного профілю.

Похибка визначення числа M місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю за допомогою залежності (2) при $\varphi(x) \leq 10^\circ$ не перевищує 1,0%. Така похибка є значно меншою за похибку обробки експериментальних даних, точність яких не перевищує 5,0% [7].

Кут відхилення надзвукового потоку у залежності (2) визначається геометричними характеристиками дифузійної частини профілю.

Для наближеної інженерної оцінки характеристик типових аеродинамічних профілів надзвукових літаків кут відхилення можна визначати параболою виду

$$\varphi(x) \approx \varphi_0 \frac{x_c}{b_1}, \quad (3)$$

де φ_0 - максимальний кут нахилу дотичної до поверхні дифузійної частини профілю або максимальний кут відхилення місцевого надзвукового потоку у дифузійній частині аеродинамічного профілю; x_c - відстань перетину розташування стрибків ущільнення від перетину максимальної товщини профілю; b_1 - відстань перетину максимальної товщини профілю до його задньої кромки.

Адіабатичне обмеження числа M_1 обумовлено максимально можливим розширенням місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю і визначається наближеною залежністю, яка отримана у праці [3]

$$M_1 - 1 \approx 2(M_\infty - M_{кр}). \quad (4)$$

Критичне число M тонких аеродинамічних профілів, які розташовані у потоці повітря під нульовим кутом атаки, можна приблизно визначити на підставі результатів лабораторних досліджень [7, 10] або з рівняння, яке запропоновано у праці [4]

$$M_{кр} \approx 1 - 0,7\sqrt{\bar{\tau}}, \quad (5)$$

де $\bar{\tau}$ - відносна товщина аеродинамічного профілю, тобто, відношення максимальної товщини профілю до його хорди.

З метою аналізу особливостей взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь керування та визначення безпекового діапазону чисел M польоту, розглянемо тонкий аеродинамічний профіль з аеродинамічної поверхнею керування, який розташований у трансзвуковому потоці під нульовим кутом атаки. Обтікання аеродинамічного профілю трансзвуковим потоком повітря уявляємо безвідривним. Швидкість трансзвукового потоку відповідає таким числам M , при яких стрибки ущільнення знаходяться на аеродинамічній поверхні керування (рис. 1).

Залежності (2) - (4) дозволяють установити закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь керування. Дійсно, при малих амплітудах коливання аеродинамічних поверхонь керування у рівнянні (4) число $M_\infty = Const$, число $M_{кр} \approx Const$,

тому і число $M_1 = Const$. Тобто, згідно рівнянь (2) і (3), стрибки ущільнення при коливаннях аеродинамічних поверхонь керування переміщуються у ті перетини хорди профілю аеродинамічних поверхонь керування, в яких кут відхилення місцевого надзвукового потоку на поверхні профілю залишається рівним куту відхилення потоку у перетині початкового розташування стрибків ущільнення.

Ці закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь керування наведені у праці [3], тому нагадаємо лише ті особливості взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь керування, які викликають виникнення збуджених сил і шарнірних моментів, а саме, особливості взаємодії стрибків ущільнення з кутовою швидкістю коливань аеродинамічних поверхонь керування.

Для оцінки цих особливостей скористаємося гіпотезою «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю [11]. Згідно з цією гіпотезою, характеристики сталого аеродинамічного профілю не відрізняються від характеристик профілю, який коливається, якщо сталий профіль скривлений таким чином, що місцеві кути його обтікання потоком повітря змінюються за законом

$$\Delta\delta(\delta) = \frac{x_{ck}}{V} \dot{\delta}(t), \quad (6)$$

де x_{ck} - відстань перетину розташування стрибків ущільнення від осі обертання аеродинамічної поверхні керування; $\dot{\delta}(t)$ - кутова швидкість коливань аеродинамічної поверхні керування.

Враховуючи вищенаведене та залежності (3) і (6), переміщення стрибків ущільнення уперед і назад від початкового розташування, які обумовлені закономірностями їх взаємодії з кутовою швидкістю коливань аеродинамічної поверхні керування, можна визначити з наступних рівнянь:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c - \Delta x_y(x; \dot{\delta})}{b_1} + \frac{x_{ck} - \Delta x_y(x; \dot{\delta})}{V} \dot{\delta}(t); \quad (7)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(x; \dot{\delta})}{b_1} - \frac{x_{ck} + \Delta x_n(x; \dot{\delta})}{V} \dot{\delta}(t), \quad (8)$$

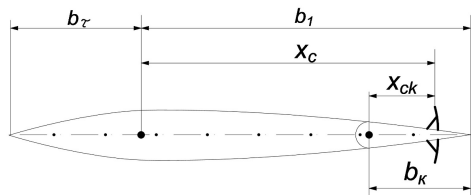


Рис. 1. Аеродинамічний профіль у трансзвуковому потоці зі стрибками ущільнення

де $\Delta x_y(x; \dot{\delta})$ – величина переміщення стрибків ущільнення уперед від початкового розташування; $\Delta x_n(x; \dot{\delta})$ – величина переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування.

З рівнянь (3) і (7) отримаємо переміщення стрибків ущільнення уперед від початкового розташування

$$\Delta x_y(x; \dot{\delta}) \approx \frac{x_{ck} b_1}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \dot{\delta}(t). \quad (9)$$

З рівнянь (3) і (8) отримаємо переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування

$$\Delta x_n(x; \dot{\delta}) \approx \frac{x_{ck} b_1}{\varphi_0 V - b_1 \dot{\delta}(t)} \dot{\delta}(t). \quad (10)$$

З рівнянь (9) і (10) отримаємо сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед і назад від початкового розташування, яке обумовлено їх взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічної поверхні керування

$$\Delta l_1(x; \dot{\delta}) \approx 2 \frac{x_{ck} b_1 \varphi_0 V}{\varphi_0^2 V^2 - b_1^2 \dot{\delta}^2(t)} \dot{\delta}(t). \quad (11)$$

При малих амплітудах коливань, враховуючи, що зміна тиску місцевого надзвукового потоку після стрибків ущільнення до тиску незбудженого потоку повітря здійснюється за законом, близьким до лінійного [12, 13], характер зміни розподіленої величини збудженої сили за хордою профілю аеродинамічної поверхні керування можна подати у вигляді, який запропонований у праці [3]

$$\bar{F}_1(x; \dot{\delta}) \approx \frac{1}{2} \Delta P(x) \Delta l_1(x; \dot{\delta}), \quad (12)$$

де $\Delta P(x)$ - характер зміни тиску місцевого надзвукового потоку за хордою профілю аеродинамічної поверхні керування.

Характер зміни тиску місцевого надзвукового потоку за хордою профілю аеродинамічної поверхні керування у рівнянні (12) можна уявити на підставі аналізу рівняння Бернуллі для стислого газу [14]. А саме, враховуючи, що розширення місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю починається з критичної величини тиску, рівняння Бернуллі для стислого газу можна подати у вигляді

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{P_\infty} = \left(\frac{1 + ((k-1)/2) M_{kp}^2}{1 + ((k-1)/2) M_\infty^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - (1 - \bar{P}_{kp}), \quad (13)$$

де \bar{P}_1 - відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю; P_1 - величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю; P_∞ - величина тиску незбудженого дозвукового потоку повітря; k - показник адіабати

(для повітря $k=1.405$); $\bar{P}_{кр}$ – відносна величина критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю.

Рівняння (13) при $M_\infty = 1,0$ можна перетворити у рівняння

$$\bar{P}_{1\min} = 2\bar{P}_{кр} - 1, \quad (14)$$

де $\bar{P}_{1\min}$ – мінімальна відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні, тобто, при $M_\infty = 1,0$.

Перетворимо залежність (14) до виду

$$\Delta\bar{P}_{1\max} = 1 - \bar{P}_{1\min} = 2(1 - \bar{P}_{кр}) = 2\Delta\bar{P}_{кр}, \quad (15)$$

де $\Delta\bar{P}_{1\max}$ – максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні; $\Delta\bar{P}_{кр}$ – відносна величина зміни критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю.

Рівність (15) вказує, що при повному адіабатичному розширенні місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку удвічі більше, ніж відносна величина зміни критичного тиску.

На підставі рівності (15) та результатів праць [12, 13], залежність величини зміни тиску місцевого надзвукового потоку за хордою аеродинамічного профілю від $x_c = 0$ до перетину розташування стрибків ущільнення можна подати у вигляді, як це було запропоновано у праці [3]

$$\Delta P(x) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right), \quad (16)$$

де ΔP_0 – максимальна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного профілю при таких числах M дозвукового потоку, коли стрибки ущільнення досягають задньої кромки профілю.

Величина ΔP_0 у рівнянні (16) може бути подана відомою наближеною залежністю [3]

$$\Delta P_0 \approx P_\infty (M_{10} - M_{\infty 0}), \quad (17)$$

де M_{10} – число M місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного профілю, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки; $M_{\infty 0}$ – число M незбудженого дозвукового потоку, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки сталого аеродинамічного профілю.

Число M_{10} місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю у рівнянні (17) можна визначити з рівняння, яке аналогічно рівнянню (2), тобто

$$M_{10} \approx \sqrt[3]{1 + 11,5\varphi_0}. \quad (18)$$

А число $M_{\infty 0}$ незбудженого дозвукового потоку повітря у рівнянні (17) може бути визначено з рівняння (4), яке у даному випадку має вигляд

$$M_{10} - 1 \approx 2(M_{\infty 0} - M_{кр}). \quad (19)$$

Враховуючи, що

$$x_c = b_1 - b_k + x_{ck}, \quad (20)$$

залежність (16) можна перетворити до виду

$$\Delta P(x) = \Delta P_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \left(1 - \frac{x_{ck}}{b_k} \right) \right], \quad (21)$$

де b_k – хорда профілю аеродинамічної поверхні керування.

Підставляючи залежності (11) і (21) у рівняння (12), отримаємо математичну модель оцінки розподіленої величини збудженої сили аеродинамічної поверхні керування на цієї ділянці розташування стрибків ущільнення

$$\bar{F}_1(x; \dot{\delta}) \approx \Delta P_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \left(1 - \frac{x_{ck}}{b_k} \right) \right] \frac{x_{ck} b_1 \dot{\delta}(t)}{\varphi_0^2 V^2 - b_1^2 \dot{\delta}^2(t)}. \quad (22)$$

При малих амплітудах коливань аеродинамічної поверхні керування розподілена величина збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування може бути визначена наступною наближеною залежністю, як це запропоновано у праці [3]

$$\bar{M}_1(x; \dot{\delta}) \approx F_1(x; \dot{\delta}) l_1(x; \dot{\delta}), \quad (23)$$

де $l_1(x; \dot{\delta})$ – відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування.

Відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування може бути визначена з наступної наближеної залежності

$$l_1(x; \dot{\delta}) \approx x_{ck} + \frac{1}{2} [\Delta x_u(x; \dot{\delta}) - \Delta x_y(x; \dot{\delta})]. \quad (24)$$

Підставляючи рівняння (22) і (24) у залежність (23) та враховуючи залежності (9) і (10), отримаємо математичну модель оцінки розподіленої величини збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування на цієї ділянці розташування стрибків ущільнення

$$\bar{M}_1(x; \dot{\delta}) \approx \Delta P_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \left(1 - \frac{x_{ck}}{b_k} \right) \right] \frac{x_{ck}^2 \varphi_0^3 V^3 b_1 \dot{\delta}(t)}{[\varphi_0^2 V^2 - b_1^2 \dot{\delta}^2(t)]^2}. \quad (25)$$

З аналізу рівняння (25) випливає, що розподілена величина збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування зі збільшенням переміщень стрибків ущільнення до задньої кромки профілю збільшується за квадратичним законом.

Але при збільшенні числа M незбудженого дозвукового потоку повітря або при збільшенні амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування обме-

жуються задньою кромкою профілю. Тому зменшується розподілена величина збудженої сили і розподілена величина збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування. Цю умову можна подати у вигляді

$$x_{ck} = b_k - \Delta x_n(x; \delta). \quad (26)$$

Тобто, у даному випадку, сумарне переміщення стрибків ущільнення зменшується за законом

$$\Delta l_2(x; \delta) = b_k - x_{ck} + \Delta x_n(x; \delta). \quad (27)$$

У цьому випадку розподілена величина збудженої сили аеродинамічної поверхні керування, як і вище, може бути подана наближеною залежністю

$$\bar{F}_2(x; \delta) \approx \frac{1}{2} \Delta P(x) \Delta l_2(x; \delta). \quad (28)$$

Підставляючи у залежність (28) рівняння (21) і (27) та враховуючи залежність (9), отримаємо математичну модель оцінки розподіленої величини збудженої сили аеродинамічної поверхні керування на цій ділянці хорди профілю

$$\bar{F}_2(x; \delta) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \left(1 - \frac{x_{ck}}{b_k} \right) \right] \left[b_k - \frac{x_{ck} \Phi_0 V}{\Phi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \right]. \quad (29)$$

Розподілена величина збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування на цій ділянці хорди профілю може бути визначена, як і вище, наближеною залежністю

$$M_2(x; \delta) \approx F_2(x; \delta) l_2(x; \delta), \quad (30)$$

де $l_2(x; \delta)$ – відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування.

Відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування у залежність (30) може бути визначена з наступної наближеної залежності

$$l_2(x; \delta) \approx b_k - \frac{1}{2} \Delta l_2(x; \delta). \quad (31)$$

Підставляючи рівняння (29) і (31) у залежність (30) та враховуючи залежності (9) і (27), отримаємо математичну модель оцінки розподіленої величини збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування на цій ділянці розташування стрибків ущільнення

$$\bar{M}_2(x; \delta) \approx \frac{1}{4} \Delta P_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \left(1 - \frac{x_{ck}}{b_k} \right) \right] \left\{ b_k^2 - \frac{x_{ck}^2 \Phi_0^2 V^2}{[\Phi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)]^2} \right\}. \quad (32)$$

Зауважимо, що при подальшому збільшенні числа M незбудженого потоку повітря початкове розташування стрибків ущільнення може бути умовно визначено залежністю

$$x_{ck} \geq b_k. \quad (33)$$

Тобто, згідно умови (33), стрибки ущільнення знаходяться на задній кромці профілю, але при збільшенні амплітуди коливань аеродинамічних поверхонь керування стрибки ущільнення мають можливість

переміщуватися уперед і сумарна величина їх переміщення може бути визначена залежністю, яка аналогічна залежності (27)

$$\Delta l_3(x; \dot{\delta}) = b_k - x_{ck} + \Delta x_y(b_k; \dot{\delta}). \quad (34)$$

Зауважимо, що у даному випадку, оскільки стрибки ущільнення фактично знаходяться на задній кромці профілю, величини їх переміщення уперед від початкового розташування у залежності (34) можна також визначати з рівняння (9), але, з урахуванням умови (33), тобто:

$$\Delta x_y(b_k; \dot{\delta}) \approx \frac{b_k b_1}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \dot{\delta}(t). \quad (35)$$

Математична модель оцінки розподіленої величини збудженої сили аеродинамічної поверхні керування, у даному випадку, може бути подана, як і вище, залежністю (28), але, з урахуванням умови (33) та залежностей (34) і (35), вона приймає вигляд

$$\bar{F}_3(x; \dot{\delta}) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left[b_k - x_{ck} + \frac{b_k b_1 \dot{\delta}(t)}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \right]. \quad (36)$$

Розподілена величина збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування може бути визначена наближеною залежністю, яка аналогічна залежності (30), а, саме,

$$M_3(x; \dot{\delta}) \approx F_3(x; \dot{\delta}) l_3(x; \dot{\delta}), \quad (37)$$

де $l_3(x; \dot{\delta})$ – відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування.

Відстань центру тиску збудженої сили від осі обертання аеродинамічної поверхні керування може бути визначена, як і вище, залежністю (31), тобто

$$l_3(x; \dot{\delta}) \approx b_k - \frac{1}{2} \Delta l_3(x; \dot{\delta}). \quad (38)$$

За умови (33) та з урахуванням рівнянь (34)–(38), математична модель оцінки розподіленої величини збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування може бути подана у вигляді

$$\bar{M}_3(x; \dot{\delta}) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left[b_k - x_{ck} + \frac{b_k b_1 \dot{\delta}(t)}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \right] \left[b_k + x_{ck} - \frac{b_k b_1 \dot{\delta}(t)}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t)} \right]. \quad (39)$$

Насамкінець, при подальшому збільшенні числа M польоту переміщення стрибків ущільнення уперед, навіть при великих амплітудах коливань аеродинамічних поверхонь керування, неможливо, тобто,

$$\Delta l_3(x; \dot{\delta}) = b_k - x_{ck} + \Delta x_y(b_k; \dot{\delta}) = 0. \quad (40)$$

У цьому випадку, як впливає з рівняння (40), стрибки ущільнення умовно розташовані позаду задньої кромки профілю аеродинамічної поверхні керування, а, саме,

$$x_{ck} = b_k + \Delta x_y(b_k; \dot{\delta}). \quad (41)$$

За умов (40) і (41) величини збуджених сил і шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування дорівнюють нулю.

Отримані результати дозволяють провести кількісний аналіз залежності збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування від розташування стрибків ущільнення за хордою профілю та від чисел M польоту.

Але для визначення безпекових умов польоту надзвукових літаків необхідно визначити максимально можливі величини збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування.

Підставляючи умову (26) у рівняння (25) або у рівняння (32), отримаємо максимально можливу величину розподілених збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування, тобто, моментів, які обумовлені особливостями взаємодії стрибків ущільнення з кутковою швидкістю коливань аеродинамічних поверхонь керування.

$$\bar{M}_0(\dot{\delta}) \approx \Delta P_0 b_k^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{\Phi_0 V} \dot{\delta}(t) \right] \left\{ \frac{\Phi_0 V b_1 \dot{\delta}(t)}{\left[\Phi_0 V + b_1 \dot{\delta}(t) \right]^2} \right\}. \quad (42)$$

З метою спрощення аналізу рівняння (42), уявимо його у вигляді

$$\bar{M}_0(\dot{\delta}) \approx \Delta P_0 b_k^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \dot{Z}(t) \right] \frac{\dot{Z}(t)}{\left[1 + \dot{Z}(t) \right]^2}. \quad (43)$$

У рівнянні (43) уведений груповий безрозмірний параметр, який, як випливає з рівняння (42), дорівнює

$$\dot{Z}(t) = \frac{b_1 \dot{\delta}(t)}{\Phi_0 V}. \quad (44)$$

Крім того, уведемо безрозмірний параметр – коефіцієнт збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування,

$$m_0(\dot{\delta}) = \frac{\bar{M}_0(\dot{\delta})}{\Delta P_0 b_k^2} \approx \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{b_1} \dot{Z}(t) \right] \frac{\dot{Z}(t)}{\left[1 + \dot{Z}(t) \right]^2}. \quad (45)$$

Залежність (45) нелінійна, тому доцільно визначити максимально можливу величину коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування для типових аеродинамічних профілів надзвукових літаків. Максимально можливу величину коефіцієнту збудженого шарнірного моменту у рівнянні (45) можна визначити при умові

$$\frac{dm_0(\dot{\delta})}{d\dot{Z}(t)} = 0. \quad (46)$$

Після диференціювання рівняння (45), з урахуванням умови (46), отримаємо

$$\dot{Z}(t) = \frac{b_1}{b_1 + b_k}. \quad (47)$$

Підставляючи залежність (47) у рівняння (45), отримаємо максимально можливу величину коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування

$$m_0(\dot{\delta}) = \frac{1}{2} \frac{b_1}{(2b_1 + b_k)}. \quad (48)$$

З аналізу рівняння (48) випливає, що максимально можлива величина коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування залежить лише від відношення b_k/b_1 .

Амплітуду коливань аеродинамічних поверхонь керування, враховуючи гармонічний характер їх коливань при виникненні трансзвукового флатеру, отримаємо з порівняння залежностей (44) і (47)

$$\delta_0 = \frac{\varphi_0 V}{\omega(b_1 + b_k)}, \quad (49)$$

де δ_0 - амплітуда коливань аеродинамічної поверхні керування; ω - кутова частота власних коливань аеродинамічної поверхні керування.

Аналіз залежності (49) показує, що для сучасних надзвукових літаків амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування, при яких збуджений шарнірний момент досягає максимальної величини, знаходиться у межах $\delta_0 = 1,2^\circ - 1,5^\circ$.

Тобто, збуджений шарнірний момент досягає максимальної величини при відносно малих амплітудах коливань аеродинамічних поверхонь керування. Тому аналіз безпекових режимів польоту при виникненні трансзвукового флатеру доцільно виконувати при умові (46), коли коефіцієнт збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування досягає максимальної величини.

Крім того, з метою кількісної оцінки безпекового діапазону чисел M польоту, уявимо залежність чисел M місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю у вигляді лінійної функції, як це було прийнято у праці [15] і, як це підтверджено результатами лабораторних досліджень [7, 12, 13]

$$M_1(x) \approx 1 + (M_{10} - 1) \frac{x_c}{b_1}. \quad (50)$$

З рівнянь (4) і (50) отримаємо залежність чисел M незбудженого потоку повітря від перетину розташування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю

$$M_\infty(x) \approx \frac{1}{2} \frac{x_c}{b_1} (M_{10} - 1) + M_{кр}. \quad (51)$$

З рівнянь (25) і (41) можна визначити перетини розташування стрибків ущільнення на профілю аеродинамічної поверхні керування, в яких можливо виникнення трансзвукового флатеру, а, саме

$$0 \leq x_{ck}(\delta) \leq b_k + \Delta x_y(\delta). \quad (52)$$

Отримані результати дозволяють кількісно оцінити діапазон чисел M незбудженого потоку повітря, в якому можливе виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування.

Кількісну оцінку безпекових чисел M польоту визначимо для наступних типів конструкційних параметрів несучих аеродинамічних поверхонь і аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків:

- відношення $b_k/b_1 = 0,5$;

- відносна товщина профілю $\bar{\tau} = 0,05$;
- максимальний кут нахилу до поверхні дифузорної частини аеродинамічного профілю [10] $\varphi_0 \approx 0,85\bar{\tau} = 0,0425$;
- кут стрілоподібності аеродинамічного профілю $\chi = 45^\circ$.

При прийнятих вхідних даних число M_{10} у рівнянні (51) визначається згідно залежності (18) і дорівнює $M_{10} = 1,142$.

Критичне число M аеродинамічного профілю у рівнянні (51) визначається залежністю (5), яка у даному випадку має вигляд

$$M_{кр} \approx 1 - 0,7\sqrt{\bar{\tau}} \cos \chi. \quad (53)$$

При прийнятих вхідних даних, з рівняння (53) отримаємо $M_{кр} = 0,8684$.

З рівняння (48) випливає, що максимально можлива величина коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування, при прийнятих вхідних даних, дорівнює $m_0(\delta) = 0,2$. Ця величина коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування спостерігається при умові (26), яку, з урахуванням залежностей (10), (20) і (47), при прийнятих вхідних даних, можна подати у вигляді $x_c = 0,666b_1$. Підставляючи x_c у рівняння (51), та враховуючи величини $M_{10} = 1,142$ і $M_{кр} = 0,8684$, отримаємо число M польоту, при якому спостерігається максимально можлива величина коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування, а саме $M_\infty = 0,9157$.

Оцінимо діапазон чисел M польоту, в якому можливе виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування.

Як випливає з рівняння (25), виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування можливо при умові $x_{ck} \geq 0$, яку, з урахуванням залежності (20) і прийнятих вхідних даних, можна подати у вигляді $x_c = 0,5b_1$.

Підставляючи отриману величину у рівняння (51), визначимо мінімальну величину числа M польоту, при якому можливе виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування

$$M_{\infty 1} = 0,9039.$$

Максимальну величину числа M польоту, при якому можливе виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування, можна визначити при умові (52), яку, з урахуванням залежностей (20), (35), (40) і прийнятих вхідних даних, уявимо у вигляді

$$x_c = 1,2b_1.$$

Підставляючи отриману величину у рівняння (51), визначимо максимальне число M польоту, при якому можливе виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування

$$M_{\infty 2} = 0,9536.$$

З отриманих результатів випливає, що виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування можливе у діапазоні чисел M польоту, який дорівнює:

$$\Delta M_{\infty} = M_{\infty 2} - M_{\infty 1} = 0,9536 - 0,9039 = 0,0497.$$

Тобто, виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування можливе в узькому діапазоні чисел M польоту.

Як вказано вище, максимально можлива величина коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування спостерігається при $M_{\infty} = 0,9157$

і дорівнює $m_0(\delta) = 0,2$.

При $M_{\infty} \leq 0,9157$ або при $M_{\infty} \geq 0,9157$ коефіцієнт збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування починає зменшуватися. Характер залежності коефіцієнту збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування від чисел M польоту поданий на рис. 2.

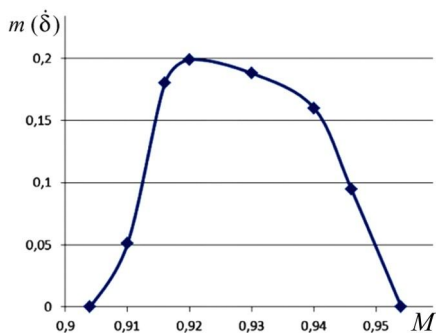


Рис. 2. Безпечний діапазон чисел M польоту

З отриманих результатів кількісної оцінки та з рис. 2 можна бачити, що при збільшенні швидкості польоту з дозвукової до надзвуковою літаки знаходяться на ділянці збільшення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування у діапазоні чисел M польоту, який дорівнює:

$$\Delta M_{\infty 1} = M_{\infty} - M_{\infty 1} = 0,9157 - 0,9039 = 0,0118.$$

При зменшенні швидкості польоту з надзвукової до дозвуковою літаки знаходяться на ділянці збільшення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування у діапазоні чисел M польоту, який дорівнює

$$\Delta M_{\infty 2} = M_{\infty 2} - M_{\infty} = 0,9536 - 0,9157 = 0,0379.$$

Тобто, діапазон чисел M польоту, в якому надзвукові літаки перебувають на етапі зменшення швидкості польоту з надзвукової до дозвуковою, більш, ніж у три рази перевищує діапазон чисел M польоту, в якому літаки перебувають на етапі збільшення швидкості польоту з дозвукової до надзвуковою.

Цей результат пояснює одну з можливих причин того, що більша частина льотних подій, які пов'язані з виникненням трансзвукового флатеру аеродинамічних поверхонь керування, спостерігалися саме на етапі зменшення швидкості польоту літаків з надзвукової до дозвуковою.

Причиною цього явища також може бути і те, що величини аеродинамічних шарнірних моментів демпфірування поверхонь керування на етапі зменшення швидкості польоту літаків зменшуються, а на етапі збільшення швидкості польоту літаків – збільшуються.

Висновки. У статті, на підставі аналізу рівнянь Бернуллі для стислого газу, зміни характеристик надзвукового потоку у течії Прандтля-Майєра та гіпотези динамічного скривлення аеродинамічного профілю отримані математичні моделі оцінки розподілених величин збуджених сил і збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування.

На підставі кількісного аналізу отриманих математичних моделей доведено, що виникнення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування спостерігається в узькому діапазоні чисел M польоту, в якому, за результатами льотних та лабораторних досліджень, виникає трансзвуковий флатер аеродинамічних поверхонь керування. Тобто, визначений безпековий діапазон чисел M польоту надзвукових літаків та аерокосмічних систем.

Отримані результати також пояснюють причину того, чому більша частина льотних подій, які пов'язані з виникненням трансзвукового флатеру аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків, спостерігається на етапі зменшення швидкості польоту з надзвукової до дозвукової.

Отримані результати можуть бути використані для попередньої наближеної оцінки характеристик трансзвукового флатеру аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків і аерокосмічних систем та при підготовки рекомендацій льотному складу щодо особливостей керування надзвуковими літаками у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аэродинамическое исследование колеблющейся поверхности управления при трансзвуковых скоростях. - М.: ЦАГИ. Обзор № 456, 1975.- 105 с.
2. Кузьмина С.И. Расчетные исследования трансзвукового флаттера самолета / Кузьмина С.И. - М.: Ученые записки ЦАГИ, том XX, № 6, 1989. - С. 110 – 115.
3. Семон Б.И. Трансзвуковий флатер: від МіГ-25 до Space Ship Two/ Семон Б.І., Сафронов О.В., Неділько О.М.// Наука і оборона-К. 2016. №3. - С. 32-35.
4. Сафронов А.В. Аэродинамическое воздействие скачков уплотнения на колеблющейся в околозвуковом потоке элерон / Сафронов А.В. – М.: Ученые записки ЦАГИ, том XX11, № 3, 1991. - С. 110 – 117.
5. Сафронов А.В. Условия возникновения автоколебаний аэродинамических поверхностей управления при безотрывном обтекании околозвуковым потоком газа / Сафронов А.В. – К.: Проблемы прочности. №2, 1990. - С. 50-55.
6. Сафронов О.В. Математична модель оцінки максимально можливих величин збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування літаків при виникненні трансзвукового флатеру / Сафронов О.В., Неділько О.М.// Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України Харків, 2016. №4(25), с. 19-23.
7. Левкин В.Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхностей управления при трансзвуковых скоростях / Левкин В.Ф. – М.: Труды ЦАГИ, выпуск 2132, 1982. – 16 с.
8. Исогаи К. О механизме резкого снижения границы флаттера крыла прямой стреловидности на режиме трансзвукового полета. Часть II / Исогаи К. – М.: Ракетная техника и космонавтика, том 19, № 10,1981. - С. 169-171.
9. Гошек И. Аэродинамика больших скоростей / Гошек И. – М.: ИЛ, 1954. – 547 с.
10. Свищев Г. П. – М.: Труды ЦАГИ, выпуск 1722, 1975.– 10 с.
11. Келдыш М. В. Избранные труды. Механика. / Келдыш М.В. – М.: Наука, 1985. – 568 с.
12. Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях. Часть I – М.: Обзоры. Переводы. Рефераты. ЦАГИ, № 441, 1974. – 140 с.
13. Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях. Часть II. – М.: Обзоры. Переводы. Рефераты. ЦАГИ, № 442, 1974. – 161 с.

14. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика / Абрамович Г. Н. – М.: Наука, 1976. - 888 с.
15. *Вильямс М.Х.* Теория неустойчившегося движения тонкого профиля в трансзвуковом потоке с внутренними скачками уплотнения / Вильямс М.Х.-М.: Ракетная техника и космонавтика, том 18, №7, 1980. – С. 11-23.

REFERENCES

1. Aerodinamicheskoe issledovanie kolebluchejsja poverchnosti upravlenija pri transzvukovuch skorostjach. (1975). [Aerodynamic study of an oscillating control surface at transonic velocities], Moscow: TsAGI, No. 456, 105 p.
2. *Kuzmina S.I.* Raschetnie issledovaniya transzvukovogo flatera samoleta [Kuzmina S.I. The calculated analysis of aircraft transonic flutter / Kuzmina S.I. – M.: Central Institute of Aerohydrodynamics materials, Volume XX, No.6, 1989. p.110 – 115].
3. *Semon B. I., Safronov A.V., Nedilko A.N.* (2016). «Transzvukovjy flatter: vid MiG – 25 do Space Ship Two» [Transonic Flutter: from MiG-25 to Space Ship Two], Science and Defense, No. 3, pp. 32-35.
4. *Safronov A.V.* Aerodinamicheskoe vozdejstvie skashkov uplotnenija na kolebluchejsja v okolozvukovom potoke eleron. [Safronov A. Aerodynamic impact of shock waves on aileron oscillating in a transonic flow on aileron / A. Safronov - Moscow: CAHI Notes, Vol. 21, No. 3, 1991, p. 110 - 117].
5. *Safronov A.V.* Usloviya vznikoveniya avtokolebaniy aerodinamicheskix poverhnostey upravlenija pri bezotrivnom obtekanii okolozvukovim potokom gaza [Safronov A.V. The self-oscillations conditions of the aerodynamic surfaces control with the attached flow of near-transonic flowing gas / Safronov A. V. – K.: Strength of materials. No.2, 1990, p.50-55].
6. *Safronov A.V., Nedilko A.N.* (2016). Matematichna model ozinki maksimalno mogljivih velichin sbudgenih charnirnih momentiv aerodinamichnich verchon keruvanna pri viniknenni transzvukovogo flateru [Mathematical model of estimation of maximum possible values of excited hinge moments of aerodynamic surfaces of control in the occurrence of transonic flutter], Science and Technology of the Air Force of Ukraine, No. 4(25), pp. 19-23.
7. *Levkin V.F.* (1982). Eksperimentalnue issledovaniija hestazionarnuch aerodinamicheskix charakteristik poverchnostej upravlenija pri transzvukovuch skorostjach [Experimental studies of non-stationary aerodynamic characteristics of control surfaces at transonic speeds], Papers of TsAGI, issue 2132, 16 p.
8. *Isogai K.* O mechanizme rezkogo snigenija granitsu flatera krula prjamoj strelovidnosti na regime transzvukovogo poleta. [Isogai K. On the mechanism of a sharp decrease in the flutter boundary of a straight sweep in a transonic flight mode. Part II / Isogai K. - M.: RTK, Vol. 19, No. 10, 1981. Pp. 169-171].
9. *Goschek I.* (1954). Aerodinamika bolshix skorostej. [Aerodynamics of high speeds], Moscow: IL, 547 p.
10. *Svichev G.P.* Effektivnost rylya I sharnirnie momrnti ego pri bolshix skorostyx [Svyshchev G.P. Efficiency of the steering wheel and its hinge moments at high speeds / Svyshchev G. P. - M.: Works of CAHI, issue 1722, 1975.– 10 p.].
11. *Keldisch M.V.* (1985). Izbrannie trudi. Mechanika. [Selected works. Mechanics], Moscow: Science, 568 p.
12. *Aerodinamika* letatelnych apparatov pri transzvukovuch skorostjach. [Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part I. - M.: Reviews. Translations. Abstracts. CAHI, No. 441, 1974. - 140 p.].
13. *Aerodinamika* letatelnych apparatov pri transzvukovuch skorostjach. [Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part II. - M.: Reviews. Translations. Abstracts. CAHI, No. 442, 1974. – 161 p.].
14. *Abramovich G.N.* Prikladnaja gazovaja dinamika [Abramovich G. N. Applied gas dynamics / G. Abramovich N. - M.: Science, 1976. - 888 p.].
15. *Vilyams M.H.* Teoriya neustanovivshjegocu lvigeniya tonkogo profilya v transzvukovom potoke s vnutrennimi skakkami uplotneniya [Williams M. H. The unstable motion theory of the thin profile in the transonic flow with internal shock waves / Williams M.H. – M.: Rocket Engineering and Space Technology, Volume 18, No. 7, 1980. – p. 11-23].

Safronov A.V., Semon B.I., Nedilko A.N., Gorina A.O.

OSCILLATIONS OF AERODYNAMIC CONSTRUCTIONS: SAFE SPEED BAND

The article deals with the shock waves regularities interaction with the flutter angular speed of the aerodynamic surfaces control are established basing on the analysis of Bernoulli's equation for compressible gas, the evaluation of changes of the supersonic flow characteristics in the Prandtl-Meyer expansion fan and the aerodynamic profile "dynamic curvature" hypothesis. The established regularities explain the cause of the disturbing forces and hinge moments of the supersonic aircraft aerodynamic surfaces control and aerospace systems at transonic flight speeds.

The mathematical models of estimation of the disturbing forces and the disturbing hinges magnitudes of the aerodynamic surfaces control are obtained basing on the established regularities of shock waves with interaction the flutter angular velocity of the aerodynamic surfaces control.

The dangerous range of Mach number flight is determined basing on a quantitative analysis of the obtained mathematical models and it is shown that the genesis of transonic flutter of supersonic aircraft and aerospace systems is possible in a narrow range of the Mach numbers flight.

Moreover, the range of the Mach numbers flight, in which there is an increase in the disturbing hinge moments of the aerodynamic surfaces control and in which the planes stay in the phase of flight speed reducing from supersonic to subsonic, is more than three times the range of the Mach numbers flight, in which the planes stay in the phase of the flight speed increasing from subsonic to supersonic. This result permits to explain one of the possible reasons why the transonic flutter occurrence of the supersonic aircraft is more often observed in the phase of flight speed reducing from supersonic to subsonic.

The obtained results can be used for a preliminary assessment of the transonic flutter characteristics of the supersonic aircraft aerodynamic surfaces control and aerospace systems, as well as the recommendations developing for flight personnel on the piloting features of supersonic aircraft at transonic flight speeds.

Keywords: mathematical model, transonic flutter, aerodynamic profile, aerodynamic surface control, shock waves, transonic flow, Mach number flight, pressure of local supersonic flow, disturbing hinge moment.

Сафронов А.В., Семон Б.И., Недилько А.Н., Горина А.А.

КОЛЕБАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ: БЕЗОПАСНЫЙ ДИАПАЗОН СКОРОСТЕЙ

В статье, на базе анализа уравнения Бернулли для сжимаемого газа, оценки изменения характеристик сверхзвукового потока в течении Прандтля-Майера и гипотезы «динамического искривления» аэродинамического профиля, установлены закономерности взаимодействия скачков уплотнения с угловой скоростью колебаний аэродинамических поверхностей управления. Установленные закономерности объясняют причину возникновения возбуждающих сил и шарнирных моментов аэродинамических поверхностей управления сверхзвуковых самолетов и аэрокосмических систем на трансзвуковых скоростях полета

На базе установленных закономерностей взаимодействия скачков уплотнения с угловой скоростью колебаний аэродинамических поверхностей управления получены математические модели оценки величин возмущающих сил и возмущающих шарнирных моментов аэродинамических поверхностей управления.

Ключевые слова: математическая модель, трансзвуковой флаттер, аэродинамический профиль, аэродинамическая поверхность управления, скачки уплотнения, трансзвуковой поток, число M полета, давление местного сверхзвукового потока, возмущающий шарнирный момент.

УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

Сафронов О.В., Семон Б.І., Неділько О.М., Горіна А.О. **Коливання аеродинамічних конструкцій: безпечний діапазон швидкостей** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102.– С. 121-138.

На основі рівняння Бернуллі для стислого газу, оцінки зміни характеристик надзвукового потоку в течії Прандтля-Майєра та гіпотези “динамічного скривлення” аеродинамічного профілю, встановлені закономірності взаємодії стрибків ущільнення з кутковою швидкістю коливань аеродинамічних поверхонь управління.

Іл. 2. Бібліог. 15 назв.

UDC 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

Safronov A.V., Semon B.I., Nedilko O.M., Gorina A.O. **Oscillations of aerodynamic constructions: safe speed band** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 121-138.

The article deals with the shock waves regularities interaction with the flutter angular speed of the aerodynamic surfaces control are established basing on the analysis of Bernoulli's equation for compressible gas, the evaluation of changes of the supersonic flow characteristics in the Prandtl-Meyer expansion fan and the aerodynamic profile “dynamic curvature” hypothesis.

Fig. 2. Ref. 15.

УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

Сафронов А.В., Семон Б.И., Недилько А.Н., Горина А.А. **Колебания аэродинамических конструкций: безопасный диапазон скоростей** // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. – С. 121-138.

На базе анализа уравнения Бернулли для сжимаемого газа, оценки изменения характеристик сверхзвукового потока в течении Прандтля-Майєра и гипотезы «динамического искривления» аэродинамического профиля, установлены закономерности взаимодействия скачков уплотнения с угловой скоростью колебаний аэродинамических поверхностей управления.

Ил. 2. Библиог. 15 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, старший науковий співробітник Національного університету оборони України імені Івана Черняхівського (м. Київ) САФРОНОВ Олександр Васильович

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7420-0062>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, професор Національного університету оборони України імені Івана Черняхівського (м. Київ) СЕМОН Богдан Йосипович

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7449-8214>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник Національного університету оборони України імені Івана Черняхівського (м. Київ) НЕДІЛКО Олександр Миколайович

Мобільний тел.: +38(093) 2564934

E-mail: Nedilko1962@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8080-0486>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат архітектури, старший викладач кафедри основ архітектури та архітектурного проектування Київського національного університету будівництва і архітектури (м. Київ) ГОРІНА Анна Олександрівна

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-9498-3869>

УДК 624.131.7

ОСОБЛИВОСТІ СТВОРЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПІДЗЕМНИХ СПОРУД

І.І. Солодей,

доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки

Е.Ю. Петренко,

кандидат технічних наук, доцент кафедри геотехніки

Г.А. Затилюк,

аспірант кафедри будівельної механіки

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.139-149

В статті розглянуто найбільш поширені питання, що виникають на етапів створення дискретних моделей для розрахунку напружено-деформованого стану системи «підземна споруда – ґрунтовий масив» за допомогою МСЕ.

Ключові слова: підземна споруда, метод скінченних елементів, навантаження від ґрунтового масиву, ґрунтова модель, межі розрахункової області.

Вступ. Сьогодні неможливо уявити собі розрахункового обґрунтування проєктів будівництва, експлуатації та реконструкції без використання сучасних програмних комплексів, які використовують МСЕ в якості своєї теоретичної бази.

Необхідність застосування чисельних методів при розрахунку підземних споруд продиктована трудомісткістю або, навіть, неможливістю виконати аналітичний розрахунок внаслідок складності конфігурації та конструктивної схеми споруди, неоднорідності властивостей матеріалів конструкцій, необхідності враховувати нерівномірне залягання ґрунтів, поетапне будівництво і т.д.

Можливості обчислювальної техніки та використання МСЕ значно полегшили та пришвидчили процес розрахунку. Це дозволило деталізувати розрахункові схеми, які ускладнилися у порівнянні з тими, що використовувалися раніше. Сучасні розрахункові моделі дозволяють відобразити дійсні умови роботи будівель і споруд на різних стадіях їх життєвого циклу, моделювати їх суттєву нелінійність.

З іншого боку сам процес створення коректної розрахункової моделі досить складний і супроводжується цілою низкою питань. Аналіз найбільш поширених складнощів, які виникають на цьому етапі, при моделюванні системи «підземна споруда – ґрунтовий масив» є основною метою написання даної статті.

Можна виділити наступні питання, які виникають при створенні таких розрахункових моделей:

- визначення величини і характеру розподілу постійних навантажень від ґрунтового масиву;
- вибір ґрунтової моделі;

- вибір меж розрахункової області;
- інші питання, наприклад: питання дискретизації сіткової області, обрання граничних умов, задання величини інтерфейсів тощо.

1. **Проблема визначення величини і характеру розподілу постійних навантажень від ґрунтового масиву.** Про проблему збору навантажень від масиву ґрунтів, які залягатимуть над майбутніми конструкціями, відомо досить давно. Висока вартість проведення натурних випробувань призвела до необхідності створення великої кількості теорій, заснованих на досить різноманітних передумовах і які дають задовільні результати у вузьких межах, відповідно до коректності цих передумов.

Перші методи аналітичного обчислення ґрунтового тиску спираються на гіпотезу, згідно з якою навантаження викликане вагою всього обсягу порід, що залягає над конструкцією і тому зростає прямо пропорційно глибині відносно поверхні землі. Однією з найбільш поширених була гіпотеза Турнера [1].



Рис. 1. Гіпотеза пропорційності глибини

тиску на довільній глибині H , слід визначати відповідно до формул:

$$\sigma_x = -g \sum_{(H)} \rho_i h_i, \quad (1)$$

$$\sigma_y = \sigma_l = -\lambda g \sum_{(H)} \rho_i h_i, \quad (2)$$

де σ_x , σ_y і σ_l - відповідно вертикальна та горизонтальна (поперечна і поздовжня) складові; g

- прискорення вільного

падіння; ρ_i та h_i - відповідно щільність та потужність довільного i -го пласту ґрунту; ν - коефіцієнт поперечної деформації пласту ґрунту, що вміщує виробку (коефіцієнт Пуассона).

Коефіцієнт бокового тиску в пружному масиві:

$$\lambda = \nu / (1 - \nu). \quad (3)$$

Для нескільких і напівскельних глинистих ґрунтів з явно вираженими реологічними властивостями коефіцієнт бокового тиску слід приймати за формулою:

$$\lambda = \frac{0.6 + 0.8\nu}{1.4 - 0.8\nu}. \quad (4)$$

Однак результати розрахунків за цим підходом не відповідають дійсному стану речей на великих глибинах, тому рівень навантажень безпідставно збільшується в десятки разів [2]. Як показує досвід будівництва, а також отримані експериментальні дані, тиск порід над підземну конструкцію (гірський тиск) не залежить, як правило, від глибини закладання споруди.

Цією обставиною була продиктована необхідність створення спеціальних гіпотез, які можна умовно поділити на наступні групи [3]:

1) гіпотези зводу тиску (обвалення), запропоновані В. Ріттером, М.М. Протод'яконовим і П.М. Цимбаревичем;

2) гіпотези про утворення призми сповзання в боках виробки, розвинені в працях М.П. Бродського і К. Терцагі;

3) гіпотези Н.М. Покровського і В.В. Орлова, засновані на спостереженнях практики;

4) гіпотези В.Д. Слесарева, А.П. Германа і А.І. Сегаля, підкріплені розрахунковими положеннями на основі апарату теорії пружності і будівельної механіки.

Найбільше значення для практики набули теорії, що базуються на припущенні про виникнення над виробкою склепіння природної рівноваги (арочного ефекту). Згідно цих теорій, гірський тиск залежить виключно від ваги вивалу породи в межах утвореного склепіння.

В практиці проектування споруд глибокого закладання поширення набула теорія розроблена професором Рижського університету В. Ріттером та дороблена професором М.М. Протод'яконовим, яка була запропонована для широкого діапазону порід – від слабких до міцних скельних та лягла в основу розділу збору постійних навантажень СНиП П-44-78 «Тоннели железнодорожные и автодорожные», який діяв в СРСР, а нині використовується в російських СП «Метрополитены» та СП «Тоннели железнодорожные и автодорожные». Згідно цієї теорії, гірський тиск залежить виключно від ваги вивалу породи в межах утвореного склепіння (арки) природної рівноваги.

Для обчислення навантаження від породи, що знаходиться під аркою природної рівноваги, необхідно оцінити її проліт B та висоту h_1 (рис. 2) за формулами:

$$B = b + 2h \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi^k / 2), \quad (5)$$

$$h_1 = \frac{B}{2f} = 0, \quad (6)$$

де f - коефіцієнт міцності, φ^k - уявний кут внутрішнього тертя.

В раніше опублікованій статті [4] на основі МСЕ дана оцінка зміни постійного навантаження від товщі ґрунтової основи на підземну споруду в залежності від глибини її залягання.

За результатами досліджень було зроблено висновок, що прямий розрахунок в межах методу скінченних елементів можливий лише для підземних споруд неглибокого закладання, для яких зберігається дія гіпотези прямої пропорційності глибині.

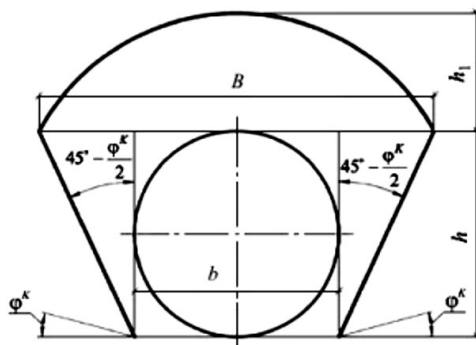


Рис. 2. Схема для розрахунку прольоту B та висоти h_1 арки природної рівноваги за теорією проф. Протод'яконова

Опубліковані результати було ще раз перевірено, виконавши розрахунок аналогічної тестової задачі в програмному комплексі Plaxis, який широко використовується у всьому світі в інженерній геотехніці.

Особливістю ПК Plaxis, що якісно вирізняє його серед інших «універсальних» скінченноелементних комплексів, є можливість використовувати для розрахунку різноманітні ґрунтові моделі, про питання вибору яких йтиметься далі.

Тому, в цей раз, дослід був проведений в два етапи: на першому етапі виконувалися розрахунки з використанням моделі Кулона-Мора, на другому етапі вирішувалися задачі з використанням моделі зі зміцненням ґрунту (Hardening Soil Model).

Результати розрахунків показали, що тиск знову лінійно зростає зі



Рис. 1. Залежність максимальних згинаючих моментів та повздовжніх сил в обрці від глибини її залягання, за результатами розв'язаної задачі в роботі [5]

збільшенням глибини залягання конструкції, незалежно від використовуваної моделі: чи то поширена модель Кулона-Мора, чи більш складна модель зі зміцненням ґрунту. Такий же характер зміни напружень наведено і у статті іншого автора [5], яким також використовував модель зі зміцненням ґрунту, і хоча ним досліджувана залежність апроксимована поліномом другого ступеня, доцільніше говорити про лінійний зв'язок між навантаженнями та глибиною залягання з огляду на малість коефіцієнтів при старшій змінній. Крім того, лінійна функція забезпечує майже аналогічну достовірність апроксимації (рис. 3).

2. Проблема вибору ґрунтової моделі. Достовірність досліджень поведінки системи «підземних споруда – ґрунтовий масив» безпосередньо залежить від обраної для розрахунку ґрунтової моделі.

У сучасній практиці геотехнічних розрахунків використовуються математичні моделі ґрунту різного ступеня складності. Перевага простих моделей полягає в меншій кількості вхідних параметрів, а також в простоті і коректності рівнянь. Однак результати моделювання в цьому випадку можуть бути досить наближеними і не узгоджуються з реальними даними. Складні, вдосконалені моделі дозволяють описати поведінку ґрунту більш точно, але вони вимагають більш широкого набору характеристик ґрунту, які потрібно визначити експериментальними методами з застосуванням

спеціального обладнання, а також достатньої обізнаності та досвідченості інженера при виборі моделі, її параметрів і аналізі отриманих результатів розрахунків.

Для проведення геотехнічних розрахунків дуже часто використовується найпростіша пружно-пластична ґрунтова модель Кулона-Мора, яка заснована на законі Гука та умові міцності Кулона. Ця модель вимагає визначення всього чотирьох розрахункових параметрів ґрунту: модуля загальної деформації E , коефіцієнта Пуассона ν , зчеплення c та кута внутрішнього тертя ϕ .

Основний принцип моделі полягає в поділі деформацій і їх швидкостей на пружні і пластичні складові [6, 7, 8]:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \tag{7}$$

де ϵ^e - пружні деформації, ϵ^p - пластичні деформації.

В даній моделі деформаційні характеристики ґрунту (модуль деформації ґрунту і коефіцієнт Пуассона) приймаються постійними величинами.

Іншою нелінійною моделлю ґрунтового масиву є вдосконалена пружнопластична модель зі зміцненням ґрунту (Hardening Soil Model). На відміну від моделі Кулона-Мора, дана модель враховує в тому числі зміцнення ґрунту при незворотних пластичних деформаціях, тобто описується залежність модуля жорсткості від напружень, і використовує гіперболічну залежність деформацій від напружень.

Для використання моделі зі зміцненням ґрунту необхідно задати додаткові параметри жорсткості, а саме: модулі деформації по січній E_{50} , при розвантаженні та повторному навантаженні E_{ur} , дотичний модуль деформації при

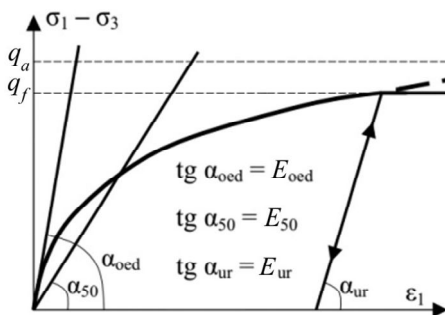


Рис. 4. Гіперболічна залежність між деформаціями та напруженнями в моделі зі зміцненням ґрунту

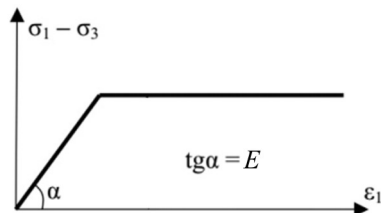


Рис. 5. Білінійна діаграма залежності деформацій та напружень в моделі Кулона-Мора

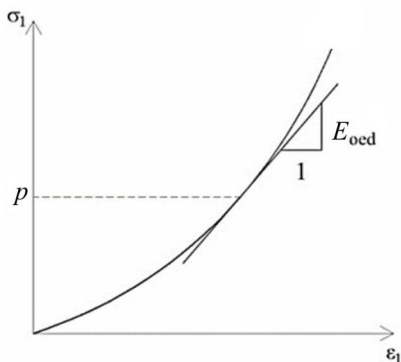


Рис. 6. Визначення модуля деформації E_{oed} в залежності від рівня напружень за результатами одометричних випробувань

первинному навантаженні в одометрі (одометричний модуль) $E_{\text{од}}$, а також показник ступеня залежності жорсткості ґрунту від рівня напружень m [6, 7, 8]. В цьому і полягає складність використання даної моделі.

Враховуючи результати порівняння результатів розв'язку різних задач з використанням згаданих моделей [4, 9, 10], можна говорити про переваги моделі зі зміцненням ґрунту над моделлю Кулона-Мора та про необхідність її використання, якщо є така можливість і цього потребує поставлена задача. Якщо немає можливості якісного отримання всіх необхідних даних по переважаючим типам ґрунту для використання більш вдосконалених моделей, то слід зупинитися на використанні моделі Кулона-Мора.

3. Вибір меж розрахункової області. Ще одна проблема, яка потребує вирішення, це вибір меж ґрунтової моделі. Багато авторів при обґрунтуванні прийнятих вихідних даних розв'язаних задач взагалі не торкаються питання прийнятих розмірів розрахункової моделі. Деякими використовується методика встановлення таких розмірів моделі, щоб вплив граничних умов на розподіл зусиль був мінімальним [11, 12]. Тобто, щоб при збільшенні розмірів моделі спостерігалась збіжність результатів до допустимої похибки. Це загальне правило і цього підходу достатньо для розрахунку конструкцій на міцність.

Вбачається, що попередній розмір розрахункової моделі можна задати із розрахунку розмірів зони впливу виробок, яка визначається за формулою [13]:

$$R_{\Delta} = r_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 6 \cdot (1 - \lambda) \cdot \Delta \cdot \cos 2\theta}}{2 \cdot \Delta}}, \quad (8)$$

де Δ - допустима похибка, r_0 - радіус виробки, λ - коефіцієнт Пуассона, θ - кут нахилу (0° - для меж по вертикалі і 90° - по горизонталі).

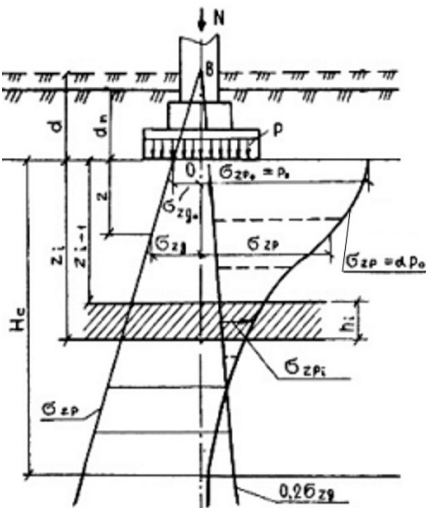


Рис. 7. Схема для розрахунку глибини стисливої зони

В той же час, описаний підхід є неприйнятним, якщо об'єктом дослідження поряд із НДС підземної споруди є величини її осідань. Відомо, що величини цього виду деформацій будуть зростати разом із збільшенням глибини моделі (розмірів по вертикалі). В цьому випадку деякі вказують на можливість використати іншу методику [14] - обмежити розрахункову схему глибиною стисливої зони, яка розраховується методом пошарового підсумування, границя якої знаходиться на глибині, де виконується умова:

$$\sigma_{zp} \leq 0,2\sigma_{zg}, \quad (9)$$

де σ_{zg} - напруження від власної

ваги ґрунту, σ_{zp} - тиск від споруди, з урахуванням коефіцієнту затухань по глибині.

Особливе місце займають методики визначення меж при динамічному розрахунку. Їх необхідно моделювати таким чином, щоб запобігти відображенню хвиль, тобто забезпечувати їх проходження чи гасіння [15].

Крім того, вбачається, що використання HSM може позбавити вад першу методику за рахунок описаної залежності жорсткості ґрунту від рівня напружень.

На наш погляд, проблема вибору меж розрахункової області є актуальною і потребує більш глибокого вивчення та розв'язання тестових задач.

4. Деякі інші питання, що виникають при моделюванні системи «підземна споруда – ґрунтовий масив». Одним з таких питань є обрання розмірів елементів скінченноелементної сітки. Використання МСЕ супроводжується похибками в результатах розрахунку, що складаються головним чином з похибки дискретизації, обумовленої заміною тіла, що має нескінченне число ступенів свободи, моделлю зі скінченим числом ступенів свободи, і похибки округлення чисел при виконанні обчислювальних операцій.

Тут необхідно скористатися загальними рекомендаціями та досліджувати збіжність моделі, провівши аналіз послідовності результатів на сітках, що згущуються, для оцінки точності розв'язку та обрати необхідний розмір сітки. Також доцільніше виконувати згущення сітки в околі досліджуваного об'єкта, залишаючи більш крупні елементи на периферії.

Думки щодо обрання граничних умов моделі серед різних авторів збігаються [16, 17]. Рекомендується верхню межу моделі залишити вільною для переміщень, обмежити горизонтальні переміщення бокових граней та горизонтальні і вертикальні для нижньої межі.

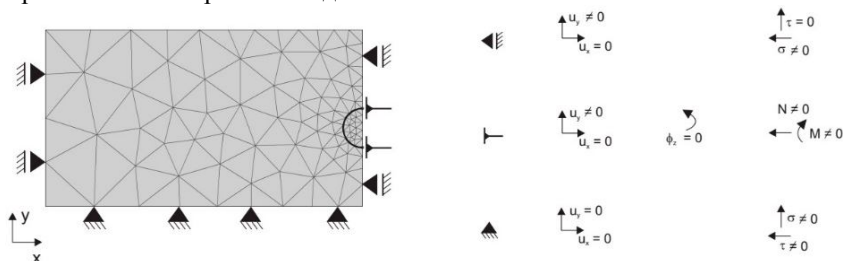


Рис. 2. Рекомендовані граничні умови для розрахункових схем

Часто досліджувана підземна споруда є симетричною, що дозволяє розглядати половину об'єкта. Для задоволення умов симетрії необхідно заборонити вертикальні та кутові переміщення.

Істотне значення має і правильне завдання величини інтерфейсів. Інтерфейс - це поверхня між ґрунтом і спорудою, яка моделює зміну сил тертя і зчеплення. Величини інтерфейсів будуть відрізнятися в залежності від технології виконання робіт. У загальному випадку міцність контакту між обробкою і ґрунтом повинна визначатися в лабораторії або натурними

дослідами. Якщо таких даних немає, можна скористатися значеннями інтерфейсів з довідкової літератури [18].

Також різні технології виконання робіт (екскавації ґрунту і зведення оправ) потребують використання різних методів їх моделювання, наприклад: β -метод, який широко поширений при розрахунку тунелів, що побудовані за новим австрійським методом проходок (NATM).

Висновок. В статті була розглянута низка питань, які виникають при моделюванні системи «підземна споруда – ґрунтові масиви». Їх врахування є обов'язковим для адекватного прогнозу НДС досліджуваних об'єктів.

Так, нехтування пролемною визначення величини і характеру розподілу постійних навантажень від ґрунтового масиву призведе до безпідставного збільшення навантажень на великих глибинах в десятки разів, у випадку використання прямого розрахунку в межах методу скінченних елементів.

Також перед нами стоїть проблема зваженого вибору ґрунтової моделі. З одного боку є проста модель Кулона-Мора, яка дає менш точні результати, однак, яких достатньо для ряду задач, а також при попередніх розрахунках. З іншого боку, існує більш складна модель зі зміцненням ґрунту, яка більш точно описує реальну поведінку основ, однак потребує більшої кількості вихідних даних, які отримуються за допомогою складних дослідів, якість яких має відповідати нормативним документам.

Межі розрахункової області мають обиратися з врахуванням описаних вище особливостей, з мінімізацією впливу граничних умов на НДС об'єкту досліджень.

Підсумовуючи можна сказати, що отримання відповідей на ці та інші питання потребує глибокого розуміння математичних методів і фізичного сенсу явищ, що моделюються, врахування різноманіття природних і виробничих факторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Борщ-Компониц В.И.* Практическая механика горных пород –Москва: Горная книга, 2013. – 322с.
2. *Егоров П. В.* Геомеханика / П.В. Егоров, Г.Г. Штумпф, А.А. Ренев та ін. – Кемерово: Кемеровский институт, 2001. – 276 с.
3. *Петренко В.Д.* Обзор аналитических и экспериментальных методов исследования взаимодействия массива и крепи / В.Д. Петренко, А.Л. Тюткин, В.И. Петренко. // Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика. – 2012. – №1. – С. 75–81.
4. *Солодей І.І.* Визначення навантажень від масиву ґрунтових сипучих порід при проектуванні підземних споруд / І.І. Солодей, Г.А. Затилок. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2016. – №97. – С. 145–154.
5. *Данг Ван Чьонг.* Изменение напряженно-деформированного состояния системы «грунтовой массив – тоннель» в зависимости от глубины заложения тоннеля / Данг Ван Чьонг // Вестник МАДИ.– 2015. – вып. 4 (43). – С.89-94
6. *Кудашева М.И.* Сравнение модели Мора-Кулона и модели упрочняющегося грунта в программном комплексе Plaxis [Электронный ресурс] / М.И. Кудашева, С.В. Калошина // Строительство и архитектура. Опыт и современные технологии. – 2017. – Режим доступа до ресурсу: <http://sbormikstf.pstu.ru/council/?n=9>.
7. *Юдина И.М.* К вопросу о выборе расчетной модели для прогнозирования напряженно-деформированного состояния грунтов при устройстве котлованов / И.М. Юдина, А.Н. Климов. // Вестник МГСУ. – 2008. – №2. – С. 145–149.
8. *Строкова Л.А.* Определение параметров для численного моделирования поведения грунтов / Л.А. Строкова. // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – №1. – С. 69–74.

9. *Безгодов М. А.* Выбор модели грунта при численном моделировании влияния разработки глубоких котлованов на существующую застройку / М.А. Безгодов, С.В. Калошина. // Вестник ПНИПУ. Урбанистика. - 2012. - № 2(6). - С. 17-27.
10. *Голубев А.И.* Выбор модели грунта и её параметров в расчётах геотехнических объектов / А.И. Голубев, А.В. Селецкий//Труды международной конференции по геотехнике "Геотехнические проблемы мегаполисов (GEOMOS 2010).– 2010. – том 4. – С. 1727-1732.
11. *Бережной Д.В.* Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы / Д.В. Бережной, М.К. Сагдатуллин, Л.У. Султанов. // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – №9. – С. 250–255.
12. *Петров Д.Н.* Численное моделирование напряженного состояния в обделке колонных станций без боковых платформ/ Д.Н. Петров, П.А.Деменков, Д.А. Потемкин. // Записки Горного института. – 2010. – т.185. – С. 166-170.
13. *Бульчев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. / Н.С. Бульчев – М.:Недра,1989. – 270 с.
14. *Городецкий А.С.* Компьютерные модели конструкций / А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. – Киев: Факт, 2005. – 344 с.
15. *Бирбраер А.Н.* Расчет конструкции на сейсмостойкость/ А.Н. Бирбраер. – С.-Пб.: Наука, 1998. – 255 с.
16. *Деменков П.А.* Численное моделирование напряженно-деформированного состояния обделок перегонных тоннелей в зоне их взаимного влияния/ П.А. Деменков. // Записки Горного института. – 2010. – т.172. – С. 24-28.
17. *Möller S.* Tunnel in duced settlement sandstructural forces in linings: dissertation/Sven Möller – (Institut für Geotechnik) Universität Stuttgart, 2006. – 174 с.
18. *Рябов С.В.* Опыт применения программного комплекса Plaxis 3D отделом проектирования тоннельных строительных конструкций /С.В. Рябов, Н.А. Соловьев. // Метро и тоннели. – 2016. – №9. – С. 53–55.

REFERENCES

1. *Borshch-Komponiets V.I.* Prakticheskaia mekhanika hornykh porod (Practical mechanics of rocks) – Moskva: Hornaia kniha, 2013. – 322 p.
2. *Ehorov P.V.* Neomekhanika (Geomechanics) / P. V.Ehorov, H. H. Shtumpf, A. A. Renevtain. – Kemerovo: Kemuizdat, 2001. – 276 p.
3. *Petrenko V.D.* Obzor analiticheskikh i eksperimentalnykh metodov issledovaniia vzaimodeistviia massiva i krepri (An overview of analytical and experimental methods for studying the interaction of the array and the support) / V.D. Petrenko, A.L. Tiutkin, V.I. Petrenko. // Mosti ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktika. – 2012. – №1. – P. 75–81.
4. *Solodei I.I.* Vznachennia navantazhen vid masivu hruntovikh sipuchikh porid pri proektuvanni pidzemnikh sporud (Determination of loads from array of runningsoil when designing underground structures)/ I.I. Solodei, H.A. Zatiliuk. // Opir materialiv i teoriia sporud. – 2016. – №97. – P. 145–154.
5. *Danh Van Chyongh.* Zmienenie napriazhenno-deformirovannoho sostoiannia sistemy «hruntovy massiv – tunnel» v zavisimosti ot hlubiny zalozhennia tonnelia (Change in the stress-strain state of the system "soilmassif - tunnel" depending on the depth of the tunnel)/ Danh Van Chyongh // Vestnik MADI. – 2015. – vyp. 4 (43). – P. 89-94
6. *Kudasheva M.I.* Sravnenie modeli Mora-Kulona i modeli uprochniaiushchegosia hrunta v prohrannmno komplekse Plaxis [Elektronniuresurs] (Comparison of the Mora-Coulomb model and the hardening soil model in the Plaxis software package)/ M.I. Kudasheva, S.V. Kaloshina // Stroitelstvo i arkhitektura. Opyt i sovremennye tekhnologii. – 2017. – <http://sbornikstf.pstu.ru/council/?n=9>.
7. *Yudina I.M.* K voprosu o vybere raschetnoi modeli dia prohnzirovaniia napriazhenno-deformirovannoho sostoiannia hruntov pri ustroistve kotlovanov (On the issue of choosing a computational model for predicting the stress-strain state of soils during the construction of trenches) / I.M. Yudina, A.N. Klimov. //Vestnik MHSU. – 2008. – №2. – P. 145–149.
8. *Strokova L.A.* Opredelenie parametrov dia chislennoho modelirovaniia povedeniia hruntov (Determination of parameters for numerical simulation of soil behavior) / L.A. Strokova // Izvestiia Tomskoho politekhnicheskogo universiteta. – 2008. – №1. – P. 69–74.
9. *Bezghodov M.A.* Vyorbor modeli hrunta pri chislenno modelirovaniii vliianiia razrabotki hlubokikh kotlovanov na sushchestvuiushchuiu zaostroiku (Choosing a soil model for numerical simulation of the influence of deep excavation on the existing building) / M.A. Bezghodov, S.V. Kaloshina. // Vestnik PNIPIU. Urbanistika. - 2012. - № 2(6). - P. 17-27.

10. *Holubev A.I.* Vyibor modeli grunta i ego parametrov v raschyotah geotekhnicheskikh ob'ektov (The choice of soil model and its parameters in the calculation of geotechnical objects) / A.I. Holubev A.V. Seletskii // Trudy mezhdunarodnoi konferentsii po heotekhnike "Heotekhnicheskie problemy mehapolisov (GEOMOS 2010). – 2010. – tom 4. – P. 1727-1732.
11. *Bereznoi D.V.* Modelirovanie deformirovaniia obdelki tonnelia metropolitena, raspolzhennoi v hrunte slozhnoi fizicheskoi prirody (Modeling the deformation of the lining of the tunnel of the subway, located in the ground of a complex physical nature) / D.V. Bereznoi, M.K. Sahdatullin, L.U. Sultanov. // Vestnik Kazanskogo tekhnolohicheskogo universiteta. – 2013. – №9. – P. 250–255.
12. *Petrov D.N.* Chislennoe modelirovanie napriazhennoho sostoiianiia v obdelke kolonnykh stantsii bez bokovykh platform (Numerical modeling of the stress state in the lining of columnar stations without sideplatforms) / D.N. Petrov, P.A. Demenkov, D.A. Potemkin. // Zapiski Hornoho instituta. – 2010. – t.185. – P. 166-170.
13. *Bulychev N.S.* Mekhanika podzemnykh sooruzhenii v primerakh i zadachakh. / N.S. Bulychev – M.: Nedra, 1989. – 270 p.
14. *Horodetskii A.S.* Kompiuternye modeli konstruksii (Computer models of constructions) / A.S. Horodetskii, I.D. Evzerov. – Kiev: Fakt, 2005. – 344 p.
15. *Birbraer A.N.* Raschet konstruksii na seismostoikost (Design calculation for earthquake resistance) / A.N. Birbraer. – SPb.: Nauka, 1998. – 255 p.
16. *Demenkov P.A.* Chislennoe modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia obdelok perehonnnykh tonneli v zone ikh vzaimnogo vliianiia (Numerical modeling of the stress-strain state of lining of distillation tunnels in the zone of the irmutual influence) / P.A. Demenkov. // Zapiski Hornoho instituta. – 2008. – t.172. – P. 24-28.
17. *Möller S.* Tunnel in duced settlement sandstructural forces in linings: dissertation/Sven Möller – (Institut für Geotechnik) UniversitätStuttgart, 2006. – 174 p.
18. *Riabkov S.V.* Opyt primeneniia prohrammnogo kompleksa Plaxis 3D otделom proektirovaniia tonnelnykh stroitelnykh konstruksii (Experience in the application of the software complex Plaxis 3D by the department of designing tunnel building structures) / C.V. Riabkov, H.A. Solovev. // Metro i tonneli. – 2016. – №9. – p. 53–55.

Стаття надійшла до редакції 18.02.2019 р.

Solodei I.I., Petrenko E.Yu., Zatyliuk Gh.A.

FEATURES OF THE NUMERICAL SIMULATION IN RESEARCH ON THE STRESS STRAIN BEHAVIOR OF UNDERGROUND STRUCTURES

In our time, widely use numerical calculations methods, the leading place among which is the finite element method (FEM).

The necessity of using numerical methods in calculating underground structures is caused by complexity and the inability to perform analytical calculation because of such factors: composite build configuration, structural diagram of constructions, anisotropy of materials, differential subsidence, multistage construction, etc.

The article considers the most common questions, which arise at the stage of discrete modelling for calculation of the stress strain behavior of system "underground development - a soil mass" by use of FEM, such as:

Measuring and pattern of distribution dead loads from soil mass. At great depth underground pressure generally does not depend on depth of construction, that give a problem.

Choosing a material model. The credibility of research results depends on selected mathematical model of the soil. Simple models give blunder and complex models require more conditions that need to be determined qualitatively using special purpose equipment.

Choosing FE-mesh dimensions. Differing approaches to problem solving impact differently on the distribution of stress strain behavior in constructions and the soil mass.

Also, the article deals questions of dimensioning mesh coarseness, selecting boundary conditions, the setting of interfaces, etc.

Problem solution requires a thorough understanding of the mathematical methods and the physical phenomena that are modelled, taking into account the diversity of natural and production factors.

Keywords: underground structures, finite element method, loads from soil mass, material model of soil, fe-mesh dimensions.

Солодей І.І., Петренко Э.Ю., Затылюк Г.А.

ОСОБЕННОСТИ СОЗДАНИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

В статье рассмотрены наиболее распространенные вопросы, возникающие на этапе создания дискретных моделей для расчета напряженно-деформированного состояния системы «подземное сооружение - грунтовый массив» с помощью МКЭ.

Ключевые слова: подземное сооружение, метод конечных элементов, нагрузки от грунтового массива, грунтовая модель, границы расчетной области.

УДК 624.131.7

Солодей І.І., Петренко Е.Ю., Затылюк Г.А. Особливості створення розрахункових моделей при дослідженні напружено-деформованого стану підземних споруд // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 139 – 149.

В статті розглянуто найбільш поширені питання, що виникають на етапі створення дискретних моделей для розрахунку напружено-деформованого стану системи «підземна споруда – грунтовий масив» за допомогою МСЕ.

Л. 7. Бібліогр. 18 назв.

Solodei I.I., Petrenko E.Yu., Zatyliuk Gh.A. Features of the numerical simulation in research on the stress strain behavior of underground structures // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv:KNUBA, 2019. – Issue 102.– P. 139 – 149.

The article considers the most common questions, which arise at the stage of discrete modelling for calculation of the stress strain behavior of system "underground development - a soil mass" by use of FEM.

Fig. 7. Ref. 18.

Солодей І.І., Петренко Э.Ю., Затылюк Г.А. Особенности создания расчетной модели при исследовании напряженно-деформированного состояния подземных сооружений // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вип. 102. – С. 139 – 149.

В статье рассмотрены наиболее распространенные вопросы, возникающие на этапе создания дискретных моделей для расчета напряженно-деформированного состояния системы «подземное сооружение - грунтовый массив» с помощью МКЭ.

Лл. 7. Библиогр. 18 назв.

Автор: доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки СОЛОДЕЙ Іван Іванович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38(044) 241-55-55

Мобільний тел.: +38(050)357-44-90

E-mail: isolodey@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

Автор: кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геотехніки ПЕТРЕНКО Едуард Юрійович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9792-4757>

Автор: аспірант кафедри будівельної механіки ЗАТИЛЮК Герман Анатолійович

Мобільний тел.: +38(099) 11-00-564;

E-mail: gberman.zt@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-0392-2214>

UDC 691.7

CONTROL OF THE STRENGTH PROPERTIES OF WELDED CONNECTIONS IN THE MANUFACTURE OF BUILDING STEEL STRUCTURES

I.P. Datsenko¹
V.I. Kotsiuruba¹
V.I. Mirnenko¹
I.M. Tkach¹
S.S. Tryhubenko²
M.O. Shyshchanov²

¹*National Defense University of Ukraine named after Ivan Chernyakhovsky, 28, Povitroflotskiy avenu, Kyiv, Ukraine*

²*Central research institute of weapons and military equipment of the Armed Forces of Ukraine, 28, Povitroflotskiy avenu, Kyiv, Ukraine*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.150-158

As is well known in construction, mechanized welding with self-shielded cored wire has found wide application. In this case, welding methods that are used do not always allow to realize the potential that is laid in this group of welding materials. In addition, modern welding methods are characterized by a large heat input in parts and welded joints. In this regard, in the article ways to improve the technological capabilities of mechanized welding with flux-cored wire by introducing modulated current into the production of building steel structures are discussed.

Key words: welding, self-shielded flux-cored wire, arc, stress, current strength, wire feed, welded joint, heat-affected zone, metal structure, strength.

Introduction. Steel structures are widely used in construction. There are many ways to connect their elements, but at the same time welding is most in demand. Therefore, the strength properties of steel structures also depend on the quality of welding.

In this regard, in recent years a lot of research has been devoted to improving the strength characteristics of steel structures through the introduction of new technological solutions, primarily in the welding industry.

In the production of building steel structures, mechanized electric-arc welding has found the greatest use since it has high productivity, processability and provides high quality joints.

The main material of the article. It is known that the reducing the power of the arc (1) (and its thermal power q , respectively) is achieved by the reducing of the strength of the welding current, which is performed by mechanized welding by reducing the feed rate of the welding wire [5, 7]:

$$q = \eta \cdot UI, \quad (1)$$

where q is the arc thermal power, W ; η - effective of the arc, for electric arc welding $\eta = 0.8 - 0.95$; U - arc stress, V ; I - welding current, A .

At the same time, for each welding method there is a minimum allowable value of the strength of the welding current, below which the stability of the arc

is violated and its break follows. Based on the condition of arc stability, for the currently used mechanized welding of parts, the possibility of reducing the arc power by reducing the strength of the welding current (the wire feed speed) has been exhausted. Consequently, other conditions to control the thermal mode of welding are required.

The first works on the control of arc welding can be attributed to 30 - 50 years of the last century [1, 2-4]. They were aimed mainly at creating automatic systems for regulating the external characteristics of welding current sources for manual arc welding with stick electrodes in order to stabilize the arc process. With the development of mechanized welding methods, the attention of researchers was shifted to increasing the stability of the arc based on the study of processes in the arc space [5-7].

These works were aimed at obtaining a stable arc burning at a rigidly stationary welding mode or on an approximate one, since, according to the researchers, it was in this mode that high welding quality could be ensured. However, over time, it turned out that in this case the possibilities for regulating the welding regime are narrowed. In this case, a contradiction arose: with a decrease in the arc power below a certain limit, the arc burning became unstable. Therefore, there were works aimed at finding welding methods that allow either to reduce the thermal effect of the arc in the welding zone at the previous arc power values [2-4], or to weld with a stable arc at significantly lower power values. In the latter case, positive results were achieved in the study of a new direction of welding — welding on a non-stationary but controlled mode [2-4, 8]. At the same time, some welding parameters were subjected to a forced purposeful and periodic change during the welding process, during which the characteristics of the arc process changed, which ultimately led to a decrease in heat input to the parts to be welded and a change in the thermal cycle of the metal.

Much of the proposals to increase the consumption of thermal energy of the arc to melt the filler material and reduce the proportion of heat going to heat the welded parts have not found practical application due to their low processability. However, the idea of the redistribution of heat has been realized recently in connection with the use of self-shielded flux-cored wires. It turned out that the melting of its metal shell and the mixture containing metal alloying elements requires more thermal energy of the arc than when melting solid welding wire.

The distribution of heat energy during welding to a large surface of the parts being welded plays the role of their concomitant heating, which reduces the cooling rate of the metal, especially the zone of thermal influence. At the same time, the probability of formation of a non-equilibrium quenching structure in the welded metal, and hence the appearance of welding stresses, is significantly reduced.

It should be noted other positive results of the application of arc control by means of an external electromagnetic field and oscillation of the electrode. First of all, these techniques contribute to the separation from the end of the melting electrode droplets of liquid metal smaller than without the use of these techniques.

It is known that with the drop-by-drop transfer of a liquid metal, the stability of arc burning increases and the possibilities for mastering alloying elements are improved. In addition, the mixing of the metal in the liquid metal bath in the forming weld is increased, which contributes to increasing the uniformity of the

metal and the formation of fine-grained structures, which, in turn, improves the mechanical characteristics of the weld.

As already noted, due to the traditional method of mechanized welding, the reduction of arc power is achieved by reducing the welding current by reducing the feed rate of the welding wire by controlling the electric motor of the feed mechanism. This increases the length of the arc and its electrical resistance, which leads to a decrease in the welding current. However, an increase in the length of the arc is possible to a certain limit, after which an arc break occurs.

To prevent this effect, it was proposed to increase the electrode reach at a constant welding wire feed rate by moving the welding current inlet point to it. But it was not possible to significantly increase the electrode reach, since a disorderly wandering of the end of the softened welding wire occurs, which causes instability of the arc and splashing of the electrode metal.

The methods, mentioned above, for reducing the welding current have another major drawback - a small range of variation of the welding current, which does not allow to achieve a tangible effect of reducing the thermal power of the arc.

Thus, all of the above methods for changing the thermal regime of mechanized welding at a constant value of the welding current (and hence the arc power), i.e. on stationary mode, although they gave positive results, they did not find wide distribution due to their inherent flaws. Therefore, another direction of controlling the heat flow of the arc is attracted by applying a non-stationary welding mode, in which a forced periodic change of the mode parameters is performed, which leads to a similar change in the arc power. In accordance with accepted terminology, such welding can be attributed to pulsed arc welding [2–4].

One of the first proposals in the field of pulsed arc welding in the early 80s of the last century was a method of welding with modulated current [3, 4], the analogue of which is the modulation technique in radio engineering.

The implementation of this method was carried out by exposing the power circuits of the welding current source, in particular, by periodically applying a pulse to the low value of the welding current from an additional low-power power source. In this case, a pulsation of the parameters of the welding arc, i. e. welding current and stress, occurred.

Studies [1–4] showed that the pulsation of the arc leads to a significant reduction in the influence of the thermal field of the arc on the weld, a favorable change in the thermal cycle of formation of the properties of the weld metal and the zone of thermal influence, the refinement of the metal structure, and the likelihood of welding stresses.

In the development of the considered modulation method, it was proposed to act not directly on the welding chains, but on the feed rate of the welding wire. Namely, with a certain periodicity, briefly reduce the feed rate of the welding wire by controlling the feed mechanism from the nominal value to a value that is lower than the minimum required for stable arc burning (until the feed stops), followed by restoring it to the nominal value. But at the same time, the delivery time with a reduced speed was selected in such a way that the arc did not have time to break due to the inertia of the change in the welding current as compared with the change in the feed speed. In this mode, the filing of the welding wire,

the average value of the welding current, and hence the thermal power of the arc, is less than with a stationary feed.

The practical implementation of the considered welding wire feed has confirmed its effectiveness. However, the results turned out to be more modest than expected due to the large inertia of the control of the feeder, consisting of an electric motor as a drive and a mechanical gearbox [8].

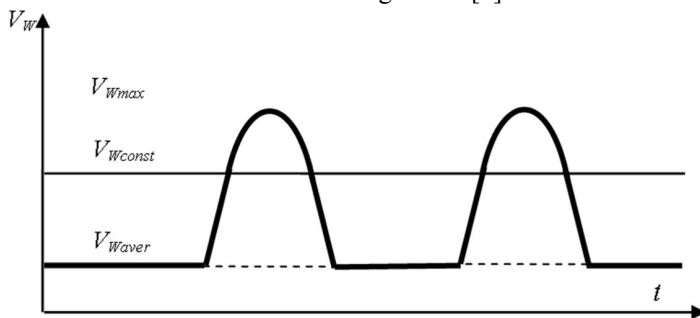


Fig. 1. The sequence diagram of the additive method of welding wire

However, in the process of research and practical application, the disadvantages of these techniques and devices for their implementation were identified. In particular, there was a deformation of the welding wire, especially when using flux-cored wire, the electrode wire went out of engagement with the feed rollers, which disrupted the process of its feeding, and, consequently, the arc stability deteriorated. In addition, it is difficult to regulate the feed mode (pulse time, pauses, their frequency).

These drawbacks are absent with the additive method of welding wire. Its essence lies in the fact that the change in the feed rate of the welding wire is achieved by periodically applying a constant amplitude of the pulse acceleration of a certain amplitude and frequency (Fig. 1), that is, we can say that the mechanical modulation of the welding wire feed is performed. This technique allows you to significantly reduce the constant component of the feed rate of the welding wire and, ultimately, the thermal power of the arc. The value of the constant component of the feed rate of the welding wire may be less than the critical value necessary to maintain stable arc burning in the traditional method of mechanized welding.

It should also be noted that with a decrease in welding current, the diameter of the arc column also decreases, as a result of which the thermal effect of the arc on the base metal of the parts being welded decreases, i.e. zone of thermal influence width decreases:

$$d_{CT} = 1,6 \left(\sqrt{I^3} / \sqrt{U_F^3} \right), \quad (2)$$

where I – the arc current, U_F – the arc stress.

For the implementation of the proposed method of filing the welding wire was proposed an appropriate feed mechanism (10).

At the same time, it should be noted that, despite the presence of certain a priori information in the field of modulated-current welding and the use of self-shielded flux-cored wire, it is not possible to decide on its basis the feasibility of

using this technology to produce welded joints of parts. First of all, a priori information about the study of welding with modulated current mainly concerns welding in carbon dioxide and in most cases with respect to pipeline welding, therefore, not all conclusions from these studies can be directly applied to welding with self-shielded cored wire.

Many aspects of current-modulated welding with self-shielded cored wire are not disclosed. In particular, the mechanism of formation of service properties of a welded joint has not been studied, there are no data on the impact of this technology on the strength properties of a welded joint, the nature of the influence of regime parameters on the technological parameters of the welding process and the formation of weld metal and zone of thermal influence. As a result, there are no reasonable recommendations on the welding process. There is no technical and economic assessment of the feasibility of the practical application of this technology.

Therefore, despite the indication of a priori information about the prospects of using mechanized welding with modulated current of self-shielded cored wire, experimental studies are needed to confirm the possibility and determine the feasibility of using it to obtain welded joints of parts.

In this regard, experimental studies were conducted during which a comparative evaluation of mechanized welding with self-shielded flux-cored wire with mechanized welding and current-modulated flux-shielded self-shielded wire was performed.

Experimental studies were carried out by applying single rollers on a steel plate (roller test method). In this case, the aim of the work was first of all to work out the modes of the proposed welding method and their influence on the properties of the weld metal. In the course of research, it was found that by controlling the welding modes of the modulated current without changing the idling stress of the source and the average wire feed speed, it is possible to achieve various properties of the weld. In this case, a controlled process of formation of a welded joint occurs (Fig. 2) by influencing the frequency and amplitude of the modulation. Also, in the course of statistical processing of experimental data, mathematical models were obtained of the influence of welding modes by modulated current on the properties of a welded joint. For example, the hardness (3) of the weld metal (Fig. 3):

$$H = 35,73 + 3,932 \cdot x_1 + 0,6096 \cdot x_2 + 1,578 \cdot x_3 - 0,5124 \cdot x_4 + 0,8737 \cdot x_5 - 0,7565 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1,379 \cdot x_1 \cdot x_3 - 0,626 \cdot x_1 \cdot x_4 + 1,653 \cdot x_1 \cdot x_5 - 0,7148 \cdot x_2 \cdot x_3 + 0,0068 \cdot x_2 \cdot x_4 + 1,863 \cdot x_2 \cdot x_5 + 0,6023 \cdot x_3 \cdot x_4 - 0,9306 \cdot x_3 \cdot x_5 - 1,038 \cdot x_4 \cdot x_5 - 0,158 \cdot x_{12} - 0,263 \cdot x_{22} + 2,467 \cdot x_{32} - 0,6114 \cdot x_{42} - 1,13 \cdot x_{52}, \quad (3)$$

where H – the seam hardness, HRC ; x_1 – no-load stress of the welding source U , B ; x_2 – welding speed V_{CB} , m/s ; x_3 – base wire speed V_{HP} , m/s ; x_4 – modulation amplitude δ , mm ; x_5 – modulation frequency f , sec^{-1} .

The analysis of a priori data and the conducted research shows that the use of mechanized welding with controlled feeding of welding wire according to the additivity principle stated above using self-shielded flux cored wire will allow achieving the following technological effects compared to the traditional method of mechanized welding:

- reduce the heat input of the electric arc into the welded joint and thereby change the thermal cycle of formation of properties of the weld metal and heat affected zone, which contributes to the formation of a more favorable metal structure, reduces the likelihood of welding stresses and various defects in it, and also reduces the width of the zone of thermal influence;
- to improve the conditions of alloying of the molten metal due to more atomized transfer of the electrode metal;
- to increase the arc stability at low values of the welding current;
- to increase the degree of grinding of the structure of the weld metal and 3TB and the degree of its homogeneity due to the influence of the pulsating thermal field; increase the hardness of the weld metal.

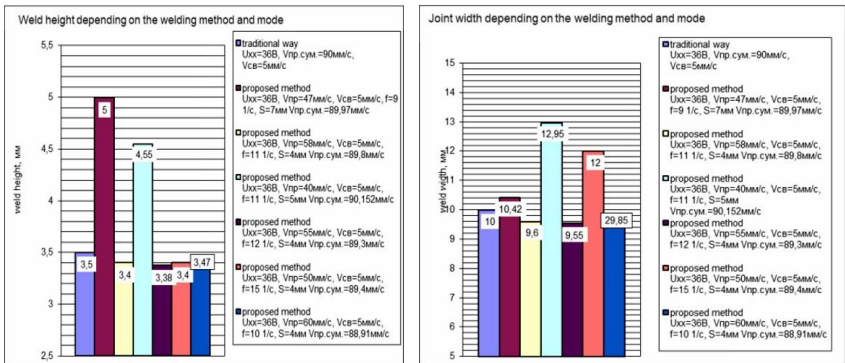


Fig. 2. The influence of the welding method on the height and width of the seam

All of the above suggests that the use of modulated current mechanized welding technology will significantly improve the quality of the welded joint.

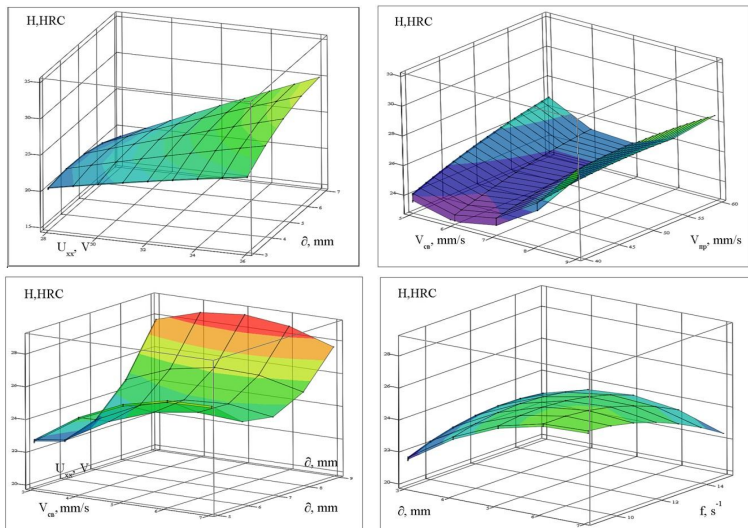


Fig. 3. Influence of modulated current welding modes on weld metal hardness

Conclusion. The analysis of the physicomechanical properties of the welded joint showed that it is not homogeneous in its quality and has a complex zonal structure. The formation of the properties of welded joint zones is interrelated and due to the complex interactions of endogenous and exogenous factors that influence their formation.

To substantiate technological solutions aimed at increasing the strength of welded joints, a research methodology has been developed based on the theoretical determination of cause-effect relationships between the main properties of welded joint zones and the factors that form them. As a result of the study, it has been established that the resistance of a welded joint is determined by the properties of the metal of the formed zones, which are formed under the influence of a complex of physicochemical, mechanical, electromagnetic processes occurring when an electric arc is applied to the base metal, filler material and protective medium, and its environmental impact (atmosphere, quality of the welded surface). The intensity of the arc depends on the welding method and its mode.

The conducted research allowed to develop a set of technological measures aimed at increasing the soil quality of welded structures. It was established that: in the applied method of mechanized welding, the power of the arc, necessary for its stable combustion, is excessive for parts. The thermal cycle of heating and cooling a welded joint occurring in this process contributes to the formation of a heterogeneous structure of its metal with insufficient physical and mechanical properties and increases the likelihood of welding stresses and, as a consequence, various kinds of structural defects.

The results of the studies made it possible to substantiate the possibility of controlling the heat flux of the arc by using non-stationary welding modes, under which a forced periodic change of the parameters of the welding mode is performed, and to choose a welding method.

REFERENCES

1. *Wagner F.A.* Oborudovanie i sposoby svarki pul'siruyushchej dugoj (Equipment and methods of pulsed arc welding). - M.: Energiya, 1980. - 120 p. (in Russian)
2. *Voropai N.M.* Parametry rezhimov i tekhnologicheskie vozmozhnosti dugovoj svarki s impul'snoj podachej svarochnoj provoloki (Parameters of modes and technological capabilities of arc welding with a pulsed feed of welding wire) // N.M. Voropay. Avtomaticheskaya svarka (Automatic welding). - 1966. - № 10. - P. 3 - 9. (in Russian)
3. *Voropay N.M.* Principy postroeniya ustrojstv dlya impul'snoj podachi svarochnoj provoloki (Principles of construction of devices for pulse supply of welding wire) // N.M. Voropay. Avtomaticheskaya svarka (Automatic welding). - 1998. - № 8. - P.19 - 25. (in Russian)
4. *Voropay N.M.* Elektromagnitnye mekhanizmy impul'snoj podachi svarochnoj provoloki (Electromagnetic mechanisms of the pulsed feed of welding wire) // N.M. Voropay, O.N. Saveliev, S.S. Semergeev. Avtomaticheskaya svarka (Automatic welding). - 1980. - №5 45-54. (in Russian)
5. *Erokhin A.A.* Osnovy svarki plavlaniem (Fundamentals of fusion welding). - M.: Mashinostroenie, 1973. - 448 p. (in Russian)
6. *Petrov G.L., Tumarev A.S.* Teoriya svarochnyh processov (Theory of welding processes). - M.: Vysshaya shkola, 1977. - 391 p. (in Russian)
7. *Bagryansky K.V., Dobrotina Z.V., Khrenov K.K.* Teoriya svarochnyh processov (Theory of welding processes). - K.: Vishchaya shkola, 1976. - 424 p. (in Russian)
8. *Kasprzhak G.M., Shchitova V.M.* Strukturnaya klassifikaciya i sravnitel'nyj analiz sistem avtomaticheskogo regulirovaniya processa dugovoj svarki (Structural classification and

- comparative analysis of automatic control systems for the process of arc welding // Works of the section of electric welding of the Academy of Sciences of the USSR. - M.: Academizdat, 1953, Vol. 1, pp. 31-57. (in Russian)
9. Finney D. Vvedenie v teoriyu planirovaniya eksperimentov (Introduction to the theory of experimental design). - M.: Nauka, 1970. - 287 p. (in Russian)
10. Patent of Ukraine Attachment for filing a dart / I.P. Datsenko, V.V. Yablokov, V.M. Osaulenko, M.V. Gribachov, O.L. Kudritsky, V.V. Kuptsiv // Declaration patent on wines No 57596A, 2003. - 6 p. (in Ukrainian)

Стаття надійшла 11.03.2019

Даценко І.П., Коцюруба В.І., Мірненко В.І., Ткач І.М., Тригубенко С.С., Шишанов М.О.

УПРАВЛІННЯ ВЛАСТИВОСТЯМИ МІЦНОСТІ ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ ПРИ ВИГОТОВЛЕННІ БУДІВЕЛЬНИХ СТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Як загально відомо в період бурхливого розвитку людства та індустріалізації виникла нагальна потреба в будівництві багатоповерхових та надмісних будівель. У зв'язку з цим понад століття сталеві конструкції є невід'ємною частиною споруд. В період бурхливого розвитку будівництва для з'єднання металевих деталей використовувались різні технології, спочатку це було kleпання та болтові з'єднання, а на рубежі 20-30 років ХХ століття поступово стало використовуватися зварювання.

На даний час понад 70% сталевих конструкцій виготовлено за допомогою електродугового зварювання. Тому до якості їх виготовлення та показників міцності висуваються підвищені вимоги. Це пов'язано з тим що за своїми властивостями, хімічним складом та мікроструктурою вони відрізняються від основного металу конструкції.

В процесі будівництва широко застосовуються різні способи електродугового зварювання, як ручне так і напівавтоматичне (механізоване). В якості зварювальних матеріалів використовують: штучні електроди, сталеву проволоку та самозахисну порошкову проволоку. В даній статті значну увагу приділяється механізованому електродуговому зварюванню порошковою самозахисною проволокою.

На даний час технології зварювання, які використовуються не завжди дозволяють реалізувати потенціал, який закладений в дану групу зварювальних матеріалів. Крім цього сучасні способи зварювання характеризуються великим тепловкладенням в деталі і зварні з'єднання. У зв'язку з цим в статті розглянуті шляхи підвищення технологічних можливостей механізованого зварювання порошковим дротом шляхом впровадження у виробництво будівельних сталевих конструкцій механізованого зварювання модульованим струмом.

Ключові слова: зварювання, самозахисна порошкова проволока, дуга, напруження, сила струму, подача дроту, зварене з'єднання, зона термічного впливу, структура металу, міцність

UDC 691.7

Datsenko I.P., Kotsiuruba V.I., Mirnenko V.I., Tkach I.N., Tryhubenko S.S., Shyshyanov M.O. **Control of the strength properties of welded connections in the manufacture of building steel structures** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 150-158.

As is well known in construction, mechanized welding with self-shielded cored wire has found wide application. In this case, welding methods that are used do not always allow to realize the potential that is laid in this group of welding materials. In addition, modern welding methods are characterized by a large heat input in parts and welded joints. In this regard, in the article ways to improve the technological capabilities of mechanized welding with flux-cored wire by introducing modulated current into the production of building steel structures are discussed.

Fig. 3. Ref. 10

УДК 691.7

Даценко І.П., Коцюруба В.І., Мірненко В.І., Ткач І.М., Тригубенко С.С., Шишанов М.О. **Управління властивостями міцності зварних з'єднань при виготовленні будівельних сталевих конструкцій** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 150-158.

Як відомо в будівництві широке застосування знайшло механізоване зварювання порошковою самозахисною проволокою. При цьому способи зварювання, які використовуються не завжди дозволяють реалізувати потенціал, який закладений в дану групу зварювальних матеріалів. Крім цього сучасні способи зварювання характеризуються

великим тепловкладення в деталі і зварні з'єднання. У зв'язку з цим в статті розглянуті шляхи підвищення технологічних можливостей механізованого зварювання порошковим дротом шляхом впровадження у виробництво будівельних сталевих конструкцій механізованого зварювання модульованим струмом.

Лл. 3. Бібліог. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, докторант Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, ДАЦЕНКО Іван Петрович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Національний університет оборони України імені Івана Черняховського

Робочий тел.: +38 044 271-06-97, факс +38 044 271-06-97 03680

Мобільний тел.: +38(050) 722-46-45

E-mail: docik_ivan@i.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0047-413X>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, доцент, професор кафедри оперативного та бойового забезпечення Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, КОЦЮРУБА Володимир Іванович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Національний університет оборони України імені Івана Черняховського.

Робочий тел.: +38 044 271-06-97, факс +38 044 271-06-97 03680.

Мобільний тел.: +38(050) 833-31-90,

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-6565-9576>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри логістики Повітряних Сил Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, МІРЕНКО Володимир Іванович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Національний університет оборони України імені Івана Черняховського.

Робочий тел.: +38 044 271-06-97, факс +38 044 271-06-97 03680.

Мобільний тел.: +38(067) 445-79-60,

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7484-1035>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор економічних наук, доцент, начальник кафедри економіки та фінансового забезпечення Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, ТКАЧ Іван Миколайович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Національний університет оборони України імені Івана Черняховського.

Робочий тел.: +38 044 271-06-97, факс +38 044 271-06-97 03680.

Мобільний тел.: +38(093) 752-81-56,

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5547-6303>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор воєнних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Центрального науково-дослідного інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України, ТРИГУБЕНКО Станіслав Семенович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України.

Робочий тел.: +38 044 520-12-84

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Центрального науково-дослідного інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України, ШИШАНОВ Михайло Олексійович

Адреса робоча: 03049, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 28, Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України.

Робочий тел.: +38 044 520-12-84.

Мобільний тел.: +38(067) 538-43-18

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7121-3666>

УДК 539.3

МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАХИСНОЇ ЄМНОСТІ РЕЗЕРВУАРА З УРАХУВАННЯМ ПОСЛІДОВНОГО ВИНИКНЕННЯ ДЕФЕКТІВ У ЗВАРНИХ ШВАХ СТІНКИ

О.О. Лук'янченко¹,
канд. техн. наук

Н.І. Бурау²,
доктор техн. наук

О.В. Костіна¹,
канд. техн. наук

О.В. Герашенко¹,
канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

²Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”, Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.159-170

Модальний аналіз захисної ємності паливного резервуара з урахуванням дефектів зварних швів стінки виконано за допомогою комп'ютерного моделювання та обчислювальних процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Дефекти зварних швів представлені у вигляді кризних тріщин одної вертикальної та двох горизонтальних, які розташовані в різних поясах оболонки. Проблема прогнозування розповсюдження дефектів вирішена за рахунок моделювання їх послідовного виникнення, збільшення їх довжин і урахування статичного вертикального навантаження. Застосовано модифікований метод Ньютона-Рафсона до розв'язання нелінійної задачі статичної та метод Ланцоша до модального аналізу оболонки. Урахування статичного вертикального навантаження в дослідженнях власних частот і форм коливань ємності дозволяє виявляти дефекти зварних швів мінімальної довжини.

Ключові слова: модальний аналіз, метод скінченних елементів, вільні коливання, нелінійна поведінка, тонкостінна циліндрична оболонка, дефект зварного шва.

Вступ. На українській антарктичній станції Академік Вернадський розташовані паливний резервуар з захисною ємністю, які експлуатуються в складних критичних умовах [1]. Проблема забезпечення надійної та безаварійної їх експлуатації є актуальною, бо аварії на них важко заздалегідь попередити і вчасно усунути. Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут” розробив автоматизовану систему раннього попередження можливості витоку палива [2]. Для вібраційного моніторингу технічного стану складної оболонкової конструкції виконано її комп'ютерне і фізичне моделювання. Дана оцінка конструкційної безпеки резервуару і захисної ємності при дії експлуатаційних навантажень виконана з рекомендаціями до їх подальшої експлуатації. Авторами досліджено напружено-деформований стан захисної ємності з дефектами зварних швів у вигляді кризних тріщин при дії вертикального статичного навантаження. [3-6]. Для моніторингу розповсюдження тріщин в зварних швах стінок оболонок на теперішній час розробляється діагностична модель з використанням класифікатора багатокласового розпізнавання на основі імовірнісних нейронних мереж.

Прогнозування зміни власних частот і форм коливань захисної ємності за рахунок виникнення дефектів зварних швів стінки, зміни їх кількості та місця розташування залишається актуальною задачею. Особливо, це важливо для проведення моніторингу розповсюдження тріщин в стінці захисної ємності з урахуванням експлуатаційних навантажень.

Побудова скінченноелементної моделі захисної ємності з дефектами зварних швів стінки. Захисна ємність є тонкостінною циліндричною оболонкою діаметром 6,96 м і висотою 6,58 м. Стінка оболонки зварена з листів прокату товщиною 5 мм, які виготовлено зі сталі СтЗпс2 (ГОСТ 14637) з відповідними механічними характеристиками: густина прокату – 7850 кг/м^3 ; модуль пружності – $2,06 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$, модуль зсуву – $0,79 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$; коефіцієнт поперечної деформації – 0,3. За допомогою обчислювального комплексу NASTRAN [7] побудована скінченноелементна модель ємності. Стінку оболонки представлено у вигляді поясів, що складаються з поверхонь (тіл), розміри яких відповідають листам прокату. При цьому враховано рекомендації розробників NASTRAN до моделювання зварних швів „встик”. Кожна поверхня змодельована у вигляді сукупності чотирьохкутних плоских скінченних елементів з шістьма степенями вільності у вузлі типу Plate (рис. 1). Дефекти зварних швів стінки ємності представлені у вигляді однієї вертикальної крізної тріщини в першому поясі (d1) та двох горизонтальних крізних тріщин: між першим і другим поясами (d2), між другим і третім поясами ємності (d3).

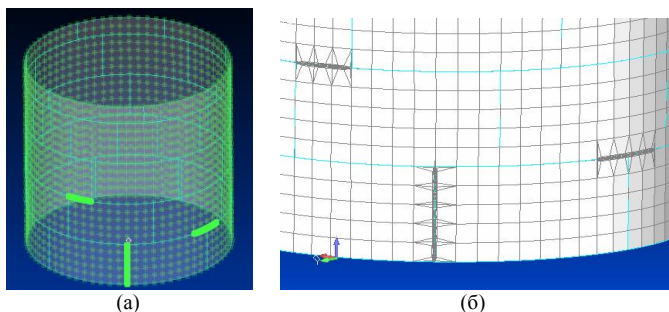


Рис. 1. Модель захисної ємності з дефектами зварних швів стінки

Тріщини в зварних швах з’являються послідовно: d1, d2 та d3. Ширина розкриття тріщин дорівнює 5 мм, що відповідає діаметру зварного шва між прокатними листами стінки оболонки. Довжина тріщин є змінною і прийнята відносною до довжини вертикального зварного шва ($l_1=1,5 \text{ м}$). Моделі крізних тріщини містять трикутні і чотирьохкутні плоскі скінченні елементи з шістьма степенями вільності у вузлі типу Plate (рис. 1 (б)).

Граничні умови приймаються згідно [2]: вузли нижньої кромки ємності жорстко закріплені, на вузли верхньої кромки введені обмеження вздовж радіусу та твірної оболонки. Загальна кількість двомірних плоских скінченних елементів моделі складає 5003, кількість вузлів – 4027. Вертикальне навантаження від ваги покрівлі захисної ємності та огорожі моделюється у вигляді зосереджених сил, які прикладаються до вузлів

верхньої кромки оболонки з граничним розрахунковим значенням $P_{gr} = 897,78$ Н на один вузол моделі [8].

Модальний аналіз захисної ємності з урахуванням послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки. Модальний аналіз оболонки виконано за допомогою розв'язання задачі на власні значення методом Ланцоша (Normal Modes), яке реалізовано в комплексі NASTRAN. Визначено динамічні характеристики захисної ємності без дефектів: перші п'ять власних частот коливань мають значення [13,9196; 13,9231; 14,0741; 14,0778; 14,7183] Гц; відносні максимальні переміщення, які відповідають першим п'яти власним формам коливань ємності без дефектів, мають значення [0,02897; 0,02963; 0,02860; 0,02875; 0,02833]. Значення перших п'яти власних частот і відповідні максимальні відносні переміщення вузлів по власних формах коливань ємності при послідовному виникненні кризних тріщин довжиною $\Delta l/l_1 = [0,1; 0,2; 0,5]$ представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Власні частоти і форми коливань ємності з дефектами зварних швів

№ форми	d1	d1+d2	d1+d2+d3	
	Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,1$			
Власні частоти коливань (Гц)	1	13,9159	13,9157	13,9147
	2	13,9175	13,9174	13,9166
	3	14,0711	14,0710	14,0693
	4	14,0725	14,0722	14,0717
	5	14,7150	14,7149	14,7134
	Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,2$			
	1	13,9155	13,9146	13,9085
	2	13,9172	13,9169	13,9154
	3	14,0703	14,0699	14,0617
	4	14,0723	14,0712	14,0707
	5	14,7146	14,7142	14,7083
	Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,5$			
	1	13,9064	13,8963	13,8085
	2	13,9159	13,9104	13,9009
	3	14,0583	14,0537	14,0056
4	14,0711	14,0561	14,0459	
5	14,7128	14,7117	14,6786	
Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,1$				
Максимальні відносні переміщення вузлів моделі по власних формах	1	0,02920	0,02916	0,02913
	2	0,02894	0,02892	0,02893
	3	0,02845	0,02823	0,02816
	4	0,02857	0,02842	0,02814
	5	0,02817	0,02817	0,02816
	Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,2$			
	1	0,02927	0,02946	0,02960
	2	0,02894	0,02898	0,02930
	3	0,02866	0,02907	0,02809
	4	0,02830	0,02890	0,02758
	5	0,02818	0,02818	0,02813
	Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1 = 0,5$			
	1	0,03068	0,03197	0,04527
	2	0,02886	0,03079	0,03201
	3	0,03029	0,02972	0,03505
4	0,02892	0,03147	0,03037	
5	0,02835	0,02918	0,03096	

Видно, що в захисній ємності при послідовному виникненні тріщин збільшення їх довжин мало впливає на значення власних частот коливань, а максимальні відносні переміщення вузлів моделі значно зростають у випадку наявності одразу двох $d1+d2$ і трьох тріщин $d1+d2+d3$ довжиною $\Delta/l_1=0,5$. Як приклад, на рис. 2 представлена перша форма власних коливань оболонки при послідовному виникненню крізних тріщин довжиною $\Delta/l_1=0,5$. В радіальному напрямку мають місце регулярні (циклічні) деформації у вигляді 10 півхвиль в усіх випадках, крім наявності трьох тріщин $d1+d2+d3$ довжиною $\Delta/l_1=0,5$, коли спостерігається нерегулярна деформація стінки оболонки (рис. 2 (1в)). По першій формі коливань в меридіанному напрямку у всіх випадках спостерігається одна півхвиля.

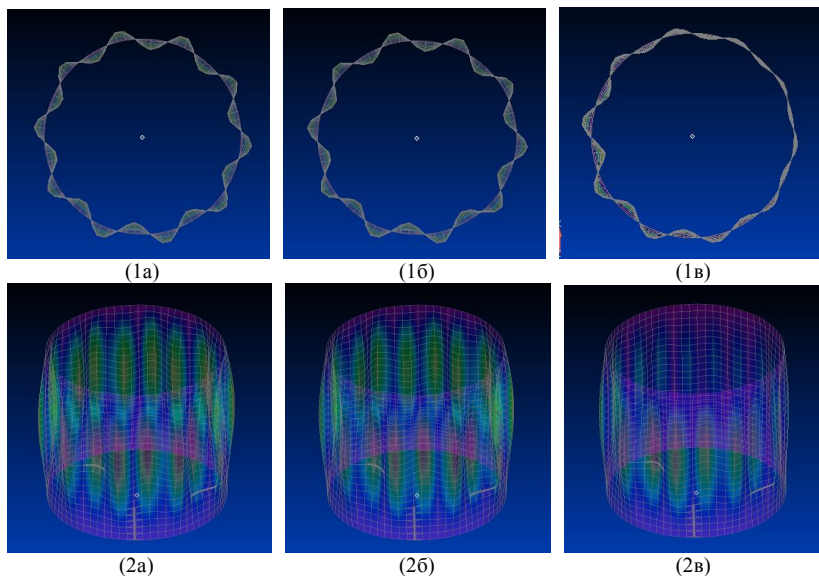


Рис. 2. Перша власна форма коливань ємності в радіальному (1) та меридіанному (2) напрямках при послідовному виникненні тріщин $d1$ (а), $d1+d2$ (б), $d1+d2+d3$ (в) довжиною $\Delta/l_1=0,5$

Вплив статичної дії вертикального навантаження на власні частоти і форми коливань ємності з дефектами зварних швів. Для визначення власних частот і форм коливань захисної ємності при дії вертикального стискаючого навантаження від ваги покрівлі та огорожі $P=P_{gr}$ розв'язана нелінійна задача статички (Nonlinear Static). Застосовано модифікований метод Ньютона-Рафсона. Враховано послідовне виникнення трьох тріщин довжиною $\Delta/l_1=[0,1;0,2;0,5]$. Задача на власні значення навантаженої ємності (Param Modes) розв'язана за допомогою метода Ланцоша. В табл. 2 представлені перші п'ять власних частот коливань і максимальні відносні переміщення вузлів моделі по відповідним власним формам коливань ємності з дефектами зварних швів різної довжини з урахуванням навантаження від ваги покрівлі з огорожею.

Таблиця 2

Власні частоти і форми коливань навантаженої ємності з дефектами зварних швів

№ форми	d1	d1+d2	d1+d2+d3	
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,1$			
Власні частоти коливань (Гц)	1	14,8116	14,8114	14,8095
	2	14,8153	14,8149	14,8147
	3	14,8304	14,8304	14,8290
	4	14,8312	14,8311	14,8310
	5	15,8871	15,8870	15,8858
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,2$			
	1	14,8107	14,8090	14,7979
	2	14,8148	14,8139	14,8136
	3	14,8301	14,8300	14,8255
	4	14,8310	14,8309	14,8305
	5	15,8865	15,8862	15,8801
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,5$			
	1	14,7911	14,7769	14,6440
	2	14,8128	14,7911	14,7710
	3	14,8283	14,8274	14,8203
4	14,8300	14,8297	14,8240	
5	15,8833	15,8773	15,8245	
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,1$				
Максимальні відносні переміщення вузлів моделі по власних формах коливань	1	0,03915	0,03949	0,03935
	2	0,03724	0,03760	0,03798
	3	0,03717	0,03731	0,03756
	4	0,03899	0,03904	0,03910
	5	0,03101	0,03102	0,03091
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,2$			
	1	0,03882	0,03988	0,03969
	2	0,03707	0,03815	0,03823
	3	0,03706	0,03733	0,03862
	4	0,03935	0,03956	0,03957
	5	0,03097	0,03106	0,03091
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,5$			
	1	0,04150	0,04163	0,04198
	2	0,03791	0,04003	0,04066
	3	0,03853	0,04029	0,03863
4	0,03957	0,03957	0,04056	
5	0,03149	0,03265	0,03990	

Видно, що при послідовному виникненні тріщин спостерігається незначна зміна значень власних частот коливань, але вона є більшою, ніж без урахування навантаження (табл. 1). Максимальні відносні переміщення вузлів моделі по власних формах коливань зростають у всіх випадках наявності тріщин довжиною, особливо при $\Delta/l_1=0,5$. Як приклад, на рис. 3 представлена перша власна форма коливань захисної ємності при дії вертикального навантаження від ваги покрівлі з огорожею при послідовному виникненні тріщин довжиною $\Delta/l_1=0,5$.

Бачимо, що вертикальне навантаження змінює власні форми коливань ємності, які отримано без урахування навантаження (рис. 2). При послідовному виникненні тріщин в навантаженій оболонці по першій формі власних коливань у всіх випадках спостерігаються нерегулярні

деформації стінки в радіальному напрямку. Одна півхвиля має місце в меридіанному напрямку.

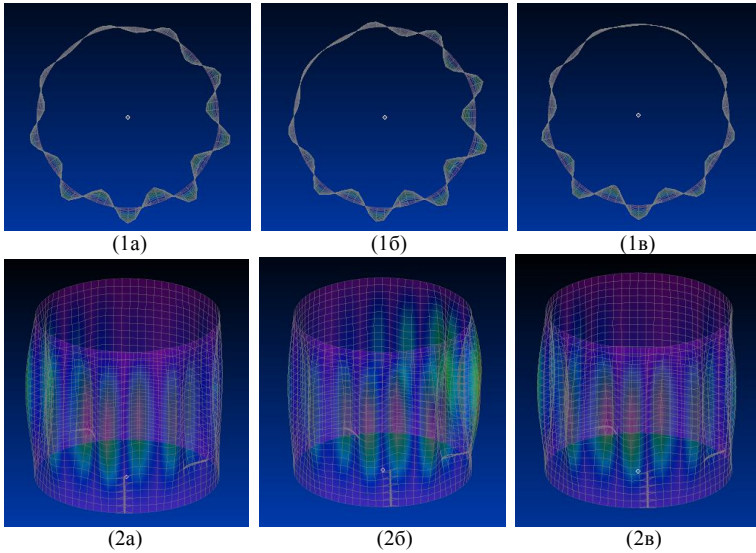


Рис. 3. Перша власна форма коливань ємності в радіальному (1) та меридіанному (2) напрямках при послідовному виникненні тріщин d1(a), d1+d2(б), d1+d2+d3(в) довжиною $\Delta/l_1=0,5$ при дії вертикального навантаження P_{gr}

Оцінка впливу послідовного виникнення дефектів зварних швів без і з урахуванням навантаження в дослідженні власних частот і форм коливань ємності. Значення зміни (%) власних частот коливань та максимальних відносних вузлових переміщень, які відповідають власним формам коливань ненавантаженої ємності без дефектів, за рахунок послідовного виникнення крізних тріщин d1, d2, d3 довжиною $\Delta/l_1=[0,1;0,2;0,5]$ та дії вертикального навантаження від ваги покрівлі та дії вертикального навантаження $P=P_{gr}$ відповідно представлено в табл. 3, 4 і на рис. 4, 5.

Таблиця 3

Зміна власних частот коливань ємності за рахунок послідовного виникнення дефектів зварних швів стінки та дії навантаження (%)

	№ форми	d1	d1+d2	d1+d2+d3	
		Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,1$			
Без урахування вертикального навантаження	1	-0,027	-0,028	-0,035	
	2	-0,040	-0,041	-0,047	
	3	-0,021	-0,022	-0,034	
	4	-0,038	-0,040	-0,043	
	5	-0,022	-0,023	-0,033	
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,2$				
	1	-0,029	-0,036	-0,080	
	2	-0,042	-0,045	-0,055	
	3	-0,027	-0,030	-0,088	
	4	-0,039	-0,047	-0,050	
5	-0,025	-0,028	-0,068		

		Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1=0,5$			
		1	-0,095	-0,167	-0,798
		2	-0,052	-0,091	-0,159
		3	-0,112	-0,145	-0,487
		4	-0,048	-0,154	-0,227
		5	-0,037	-0,045	-0,270
		Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1=0,1$			
3 урахуванням вертикального навантаження $P=P_{gr}$	1	6,408	6,407	6,393	
	2	6,408	6,405	6,404	
	3	5,374	5,374	5,364	
	4	5,352	5,351	5,350	
	5	7,941	7,940	7,932	
			Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1=0,2$		
	1	6,402	6,390	6,310	
	2	6,404	6,398	6,396	
	3	5,372	5,371	5,339	
	4	5,350	5,350	5,347	
	5	7,937	7,935	7,894	
			Відносна довжина тріщини $\Delta l/l_1=0,5$		
	1	6,261	6,159	5,204	
	2	6,390	6,234	6,090	
	3	5,359	5,352	5,302	
4	5,343	5,341	5,301		
5	7,915	7,875	7,516		

„+” збільшення значення, „-” зменшення значення

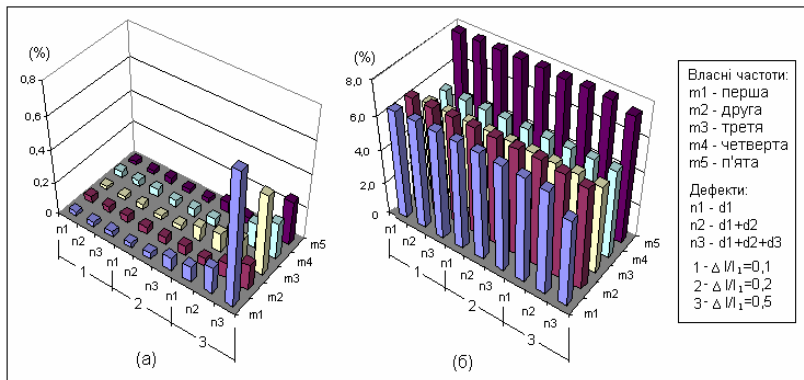


Рис. 4. Зміна перших п'яти власних частот коливань ємності за рахунок послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки: (а) $P=0$, (б) $P=P_{gr}$

На рис. 4 (а) бачимо, що вплив послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки ненавантаженої ємності на значення власних частот коливань є максимальним при довжині дефектів $\Delta l/l_1=0,5$, але незначним (1%). Чутливими є перша, третя та п'ята частоти коливань. Дія статичного вертикального навантаження від ваги покрівлі та огорожі (рис. 4 (б)) збільшує значення власних частот коливань ємності (<8%). Але збільшення кількості крізних тріщин у зварних швах та їх довжин зменшує значення власних частот коливань ємності (>1%). Максимальний вплив спостерігається на значення першої, другої та п'ятої власної частоти коливань оболонки.

Таблиця 4

Зміна максимальних відносних переміщень по власних формах коливань ємності за рахунок послідовного виникнення дефектів та дії навантаження (%)

№ форми	d1	d1+d2	d1+d2+d3
	Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,1$		
1	-0,794	0,656	0,552
2	-2,329	-2,396	-2,419
3	-0,524	-1,294	-1,538
4	-0,626	-1,148	-2,122
5	-0,565	-0,565	-0,600
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,2$			
1	1,036	1,691	2,175
2	-2,386	-2,247	-1,140
3	0,210	1,643	-1,783
4	-1,565	0,522	-4,070
5	-0,529	-0,529	-0,706
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,5$			
1	5,903	10,356	56,265
2	-2,657	3,959	8,247
3	5,909	3,916	22,552
4	0,591	9,461	5,635
5	0,071	3,000	9,283
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,1$			
1	35,140	36,313	35,830
2	30,073	31,331	32,658
3	29,965	30,455	31,329
4	35,617	35,791	36,000
5	9,460	9,495	9,107
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,2$			
1	34,001	37,660	37,004
2	29,480	33,252	33,531
3	29,580	30,524	35,035
4	36,870	37,600	37,635
5	9,319	9,636	9,107
Відносна довжина тріщини $\Delta/l_1=0,5$			
1	43,252	43,700	44,909
2	32,414	39,818	42,019
3	34,720	40,874	35,070
4	37,635	37,635	41,078
5	11,154	15,249	40,840

„+“ збільшення значення, „-“ зменшення значення

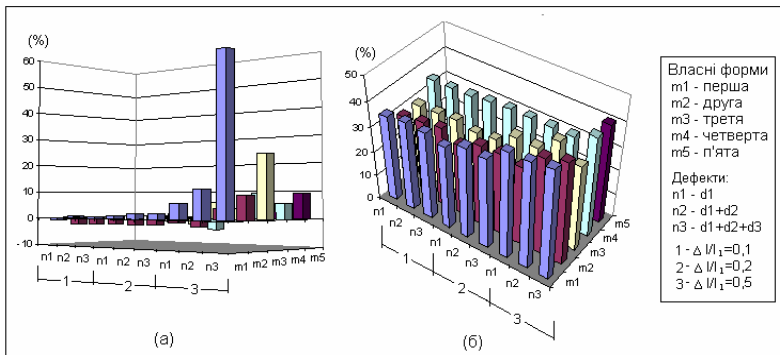


Рис. 5. Зміна максимальних відносних переміщень по перших п'ятих власних формах коливань ємності за рахунок послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки: (а) $P=0$, (б) $P=P_{gr}$

Порівняльний аналіз засвідчив, що максимальні відносні вузлові переміщення по відповідних власних формах коливань за рахунок появи дефектів у зварних швах стінці ненавантаженої ємності (рис. 5 (а)) зменшуються (<5%) і значно збільшуються лише при наявності трьох дефектів $d1+d2+d3$ довжиною $\Delta/l_1=0,5$ (<57%). Особливо, цей вплив спостерігається на першу, третю та п'яту форми власних коливань. При дії статичного вертикального навантаження (рис. 5 (б)) значне збільшення максимальних вузлових переміщень по власних формах коливань простежується для всіх довжин і кількостей дефектів зварних швів (<45%), що важливо для їх виявлення.

Висновок. Комп'ютерне моделювання захисної ємності та обчислювальні процедури програмного комплексу скінченноелементного аналізу дало змогу виконати модальний аналіз оболонки з урахуванням дефектів зварних швів. Проблема прогнозування розповсюдження дефектів зварних швів в стінці ємності може бути вирішена за рахунок моделювання послідовного виникнення крізних тріщин, збільшення їх кількості та довжин. Урахування дії вертикального навантаження при дослідженні власних частот і форм коливань ємності дає змогу виявляти дефекти зварних швів одразу при їх виникненні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Протокол про охорону навколишнього середовища до Договору про Антарктику (Мадрид, 4 жовтня 1991р.) Закон України №2284 – III від 22.02.2001р.
2. Розробка автоматизованої системи раннього попередження можливості витоку палива на українській Антарктичній станції Академик Вернадський// Звіт про науково-дослідну роботу КПІ. – 2011. – 79 с.
3. *Баженов В.А., Лук'яченко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Probabilistic Approach to Determination of Reliability of an Imperfect Supporting Shell//Strength of Materials: Volume 46, Issue 4 (2014), Page 567-574.
4. *Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Bouraou N.I., Kuz'ko O.V.* Investigation of Static and Dynamic Characteristics of Complex Thin-Walled Shell Structure with Cracks. – Strength of Materials: Volume 48, Issue 3 (2016), pp. 401-410.
5. *Bouraou N.I., Luk'yanchenko O.O., Tsybulnik S.A., Shevchuk D.V.* Vibration Condition Monitoring of the Vertical Steel Tanks // Vibrations in Physical Systems Vol. 27 (2016), pp. 53-60.
6. *N. Bouraou, S. Rupich, O. Lukianchenko, O. Kostina* Monitoring of the Crack Propagation in Welded Joint of the Tank Using Multi-Class Recognition // Vibrations in Physical Systems (02.2018).
7. *Рудаков К.Н.* FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечноэлементное моделирование конструкций. – К.: КПИ (2011), 317 с.
8. ДБН В.1.2-2-2006 „Навантаження і впливи” (2006), 75 с.

REFERENCES

1. Protokol pro okhoronu navkolyshnoho seredovyshcha do Dohovoru pro Antarktyku (Madryd, 4 zhovtnia 1991r.) Zakon Ukrainy №2284 – III vid 22.02.2001r.
2. Rozrobka avtomatyzovanoi systemy rannoho poperedzhennia mozhyvosti vytoku palyva na ukrainskii Antarktychnii stantsii Akademik Vernadskiy// Zvit pro naukovo-doslidnu robotu KPI. (2011), 79 s.
3. *Bazhenov V.A., Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Geraschenko O.V.* Probabilistic Approach to Determination of Reliability of an Imperfect Supporting Shell//Strength of Materials: Volume 46, Issue 4 (2014), pp. 567-574.

4. Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Bouraou N.I., Kuz'ko O.V. Investigation of Static and Dynamic Characteristics of Complex Thin-Walled Shell Structure with Cracks. – Strength of Materials: Volume 48, Issue 3 (2016), pp. 401-410.
5. Bouraou N.I., Luk'yanchenko O.O., Tsybulnik S. A., Shevchuk D. V. Vibration Condition Monitoring of the Vertical Steel Tanks // Vibrations in Physical Systems Vol. 27 (2016), pp. 53-60.
6. N. Bouraou, S. Rupich, O. Lukianchenko, O. Kostina Monitoring of the Crack Propagation in Welded Joint of the Tank Using Multi-Class Recognition // Vibrations in Physical Systems (02.2018).
7. Rudakov K.N. FEMAP 10.2.0. Heometrycheskoe y konechnoэлементnoe modelyrovanye konstruksyi. – K.: KPY (2011), 317 s.
8. DBN V.1.2-2-2006 „Navantazhennia i vplyvy”(2006), 75 s.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Lukianchenko O.O., Bouraou N.I., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.

MODAL ANALYSIS OF THE PROTECTIVE SHELL OF THE TANK TAKING INTO ACCOUNT THE SEQUENTIAL OCCURRENCE OF DEFECTS IN THE WELDED SEAMS OF THE WALL

The natural frequencies and vibration modes of the protective shell of the fuel tank with defects in the welded seams of the wall were investigated. With the help of a computer finite element program a model of the protective container in the form of a cylindrical thin-walled shell was constructed. The wall of the shell was presented in the form of belts and surfaces that consist of the rolled sheets. Each surface was represented as a set of flat quadrangular finite elements with six degrees of freedom in each node. Defects of the welds were presented in the form of one vertical and two horizontal through cracks located in different belts of the shell. To simulate the defects at their locations flat quadrangular and triangular finite elements were used. The modal analysis of the protective shell was performed by solving the eigenvalue problem using Lanczos method. The effect of constant static vertical weight load of the roof and fencing, which is dangerous for the overall stability of the thin wall of the shell, is estimated. Determination of natural frequencies and vibration modes of the protective shell under the action of a vertical load was performed in two stages. At the first stage, the nonlinear statics problem was formulated as a modified Lagrange approach and solved using the Newton-Raphson stepwise loading method. At the second stage, the eigenfrequencies and vibration modes of the protective shell were determined using the Lanczos method. The problem of predicting the propagation of defects is solved by simulating their sequential occurrence as well as increasing their length and number.

Keywords: modal analysis, finite element method, free vibrations, nonlinear behavior, thin-walled cylindrical shell, weld defect.

Лукьянченко О.А., Бурау Н.И., Костина Е.В., Геращенко О.В.

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАЩИТНОЙ ЕМКОСТИ РЕЗЕРВУАРА С УЧЕТОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В СВАРНЫХ ШВАХ СТЕНКИ

Модальный анализ защитной емкости топливного резервуара с учетом дефектов сварных швов стенки выполнен с помощью компьютерного моделирования и вычислительных процедур программного комплекса конечноэлементного анализа. Дефекты сварных швов представлены в виде сквозных трещин одной вертикальной и двух горизонтальных, расположенных в разных поясах оболочки. Проблема прогнозирования распространения дефектов решена за счет моделирования их последовательного возникновения, увеличения их длины и учета статической вертикальной нагрузки. Применен модифицированный метод Ньютона-Рафсона к решению нелинейной задачи статики и метод Ланцоша к модальному анализу оболочки. Учет статической вертикальной нагрузки в исследованиях собственных частот и форм колебаний емкости позволяет выявлять дефекты сварных швов минимальной длины.

Ключевые слова: модальный анализ, метод конечных элементов, свободные колебания, нелинейное поведение, тонкостенная цилиндрическая оболочка, дефект сварного шва.

УДК 539.3

Лук'янченко О.О., Бурау Н.І., Костіна О.В., Геращенко О.В. **Модальний аналіз захисної смності резервуара з урахуванням послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 159-170.

Виконано модальний аналіз захисної смності паливного резервуара з урахуванням дефектів зварних швів стінки за допомогою комп'ютерного моделювання та обчислювальних процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Проблема прогнозування розповсюдження дефектів у зварних швах стінки смності вирішена за рахунок послідовного виникнення дефектів у вигляді крізних тріщин, збільшення їх довжини і урахування статичної дії вертикального навантаження.

Табл. 4. Іл. 5. Бібліогр. 8 назв.

UDC 539.3

Lukianchenko O.O., Bouraou N.I., Kostina O.V., Gerashchenko O.V. **Modal analysis of the protective shell of the tank taking into account the sequential occurrence of defects in the welded seams of the wall** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue. 102. – P. 159-170.

A modal analysis of the protective shell of the fuel tank was carried out taking into account defects of the wall welded seams using computer simulation and computational procedures of the finite element analysis software package. The problem of predicting the propagation of defects in welded seams of the shell wall has been solved by the sequential occurrence of defects in the form of through cracks, increasing their length and taking into account the static effect of the vertical load.

Tab. 4. Fig. 5. Ref. 8.

УДК 539.3

Лук'янченко О.А., Бурау Н.І., Костіна Е.В., Геращенко О.В. **Модальний аналіз захисної смності резервуара з урахуванням послідовного виникнення дефектів в зварних швах стінки** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 102. – С. 159-170. – Укр.

Выполнен модальный анализ защитной смности топливного резервуара с учетом дефектов сварных швов стенки с помощью компьютерного моделирования и вычислительных процедур программного комплекса конечноэлементного анализа. Проблема прогнозирования распространения дефектов в сварных швах стенки смности решена за счет последовательного возникновения дефектов в виде сквозных трещин, увеличения их длины и учета статического действия вертикальной нагрузки.

Табл. 4. Ил. 5. Библиогр. 8 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Робочий тел.: +38(044) 241-54-20.

Мобільний тел.: +38(095) 727-18-25.

E-mail: lukianch0907@meta.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувачка кафедри приладів і систем орієнтації і навігації Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», БУРАУ Надія Іванівна

Адреса робоча: 03056, Київ, Перемоги 37, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», БУРАУ Надії Іванівні

Робочий тел.: +38(044) 204 -85-02

Мобільний тел.: +38(097)332-42-47

E-mail: nburau@ukr.net

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КОСТИНА Олена Володимирівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТИНІЙ Олені Володимирівні.

Робочий тел.: +38(044) 241-54-20.

Мобільний тел.: +38(098) 275-19-93.

E-mail: kl0867@meta.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-6692-6231>

Автор(вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГЕРАЩЕНКО Олег Валерійович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ГЕРАЩЕНКУ Олегу Валерійовичу

Робочий тел.: +38(044)241-54-20

Мобільний тел.: +38(095)661-6052

E-mail: olg_guera@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1951-4805>

УДК 539.3

АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ОБОЛОНОК

В.А. Баженов,

д-р. техн. наук, професор

О.П. Кривенко,

канд. техн. наук, старший науковий співробітник

Ю.В. Ворона,

канд. техн. наук, доцент

Київський національний університет будівництва і архітектури

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.171-179

Проведено дослідження власних коливань оболонок обертання параболічної форми. Методика аналізу спирається на застосування просторового скінченного елемента для моделювання тонкої пружної оболонки. Виконано порівняння розв'язків з результатами розрахунків, що отримані іншими авторами.

Ключові слова: тонка параболічна оболонка, універсальний просторовий скінченний елемент, власні коливання.

Вступ. У багатьох галузях техніки широке застосування знаходять елементи конструкцій, що являють собою тонкі оболонки та оболонки середньої товщини. Наприклад, це куполи, склепіння, покриття та перекриття великопрогонових споруд; резервуари та цистерни; обтічники, фюзеляжі та ліхтарі літальних апаратів тощо.

У науковій літературі існує велика кількість теоретичних, чисельних та експериментальних досліджень оболонок різного обрису. Найбільш вивченими є оболонки обертання канонічної форми переважно сталої товщини. Незважаючи на велику кількість досліджень, що присвячені оболонкам обертання, результати досліджень параболічних оболонок мало представлені у літературі. У той же час, наприклад, у будівництві параболічні оболонки використовуються у вигляді несучих куполів (рис. 1), застосовуються як головні обтічники в авіакосмічній техніці (рис. 2), а також як обтічники швидкісної підводної та наземної техніки.



(а) (б) (в)
Рис. 1. Застосування параболічних форм у будівництві [1]:

(а) – форма параболоїда обертання купола шахти (Caserones Dome, діаметр 145 м, висота 94 м), побудовано на висоті 4000 м над рівнем моря в чилійських Андах, розроблено для протистояння несприятливим умовам навколишнього середовища, включаючи снігові навантаження, що досягають 800 кг/м^2 , і тиск вітру до 300 кг/м^2 ;

(б) – куполи храму-планетарію «The Temple of the Vedic Planetarium», м. Маяпур, Індія;

(с) – параболічні купольні структури житла, Австралія

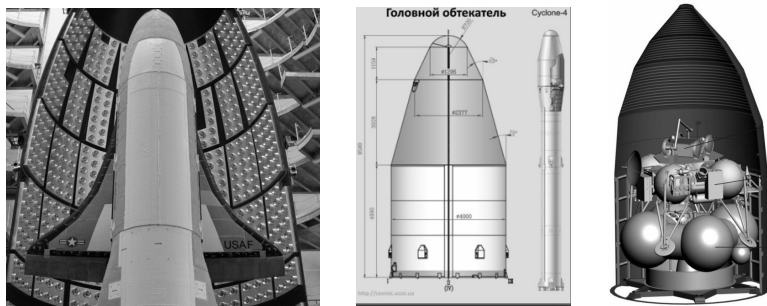


Рис. 2. Головний обтічник параболічної форми ракет-носіїв [2]

Огляд з розрахунку параболічних оболонок та реальні приклади їхнього застосування в будівництві та архітектурі за останні 20 років наведено у статті [1]. У роботах [3, 4] досліджуються вільні коливання параболічних оболонок обертання, які моделюють обтічник ракети-носія. Аналіз геометрії головного обтічника згідно з [3, 4] свідчить, що він добре моделюється параболічною оболонкою сталі товщини.

Для безпечної експлуатації тонкостінної конструкції необхідно знати умови її міцності та надійності. У зв'язку з цим особливого значення набувають методи аналізу їхніх динамічних характеристик. Проблема визначення власних частот і форм коливань оболонки, які є однією з головних динамічних характеристик будь-якої пружної системи, займає важливе місце при дослідженні поведінки конструкції. Метою роботи є застосування розробленої в роботах [9, 10] методики до визначення параметрів власних коливань пружної тонкої ізотропної параболічної оболонки сталі товщини.

1. Постановка задачі. Алгоритм задачі з визначення параметрів власних коливань тонкої пружної оболонки спирається на використання розробленої в [5, 6] скінченноелементної моделі неоднорідної оболонки (СЕМО). Для визначення спектру нижчих частот і векторів власних коливань оболонок неоднорідної структури застосовується метод ітерації підпростору [7].

З єдиних позицій просторової геометрично нелінійної теорії термопружності в роботах [5, 6] розроблена скінченно-елементна методика дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки пружних оболонок. Розглядаються тонкі та середньої товщини оболонки різної форми і структури при статичній дії силових і температурних навантажень. Під неоднорідністю оболонки розуміється: 1) наявність геометричних особливостей за товщиною оболонки у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зломами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках оболонки; 3) структурна неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною та в плані у вигляді комбінації різних багатошарових пакетів.

Скінченно-елементне дослідження оболонок базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). Використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Тонка оболонка розглядається як тривимірне тіло та моделюється за товщиною одним ізопараметричним просторовим скінченним елементом (СЕ) з полілінійними функціями форми. Особливості напружено-деформованого стану оболонки враховані використанням двох неklasичних гіпотез: про сталість нормальних напружень обтиснення волокон шару по товщині та деформівної прямій в напрямку товщини. Остання гіпотеза дозволяє виконувати у процесі деформування стикування просторових СЕ без порушення спільності за координатами та переміщенням, а також природним чином моделювати злами в оболонці, нахили стінок ребер, виїмок і отворів. У напрямку товщини розподіл переміщень прийнято лінійним, що є загальноприйнятим в теорії тонких оболонок [8]. Завдяки такому підходу методика дає змогу на основі єдиної методологічної бази досліджувати тонкі оболонки з різноманітними геометричними особливостями за товщиною при термосилових навантаженнях.

Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки виконуються на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах. Нелінійний розв'язок задачі отримується за комбінованим алгоритмом, що поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютон-Канторовича на кожному кроці навантаження. Відповідно до цього частоти і форм власних коливань оболонки визначаються в моменти її крокового термосилового навантаження. Методика врахування у задачах про власні коливання оболонки наявності попереднього напруження конструкції від дії різноманітних статичних термосилових навантажень розроблена в [9, 10].

2. Аналіз власних коливань параболічних оболонок. Досліджується вплив геометричних параметрів (висоти) параболічних оболонок обертання на власні коливання. Будемо розглядати параболоїди сталої товщини h , висотою H (стріла підйому) та радіусом опорного контуру R . Форму серединної поверхні оболонки в декартовій системі координат x^i задамо рівнянням (рис. 3):

$$x^1 = H \left[1 - \frac{(x^2)^2 + (x^3)^2}{R^2} \right].$$

Оболонка жорстко затиснута по контуру та виготовлена з ізотропного матеріалу (E – модуль пружності, ν

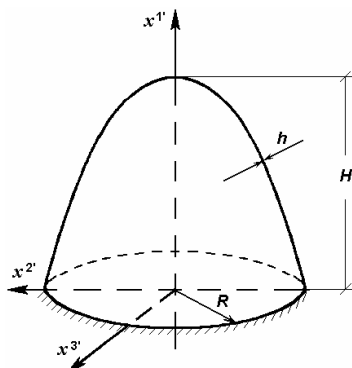


Рис. 3. Параболічна оболонка обертання

– коефіцієнт Пуассона). За розрахункову приймалася скінченно-елементна модель у вигляді половини оболонки, що має площину симетрії. Оскільки вершина оболонки є особливою точкою, тому в скінченно-елементній моделі конструкції навколо неї вирізаний отвір, що має діаметр менший за товщину оболонки.

Дослідження виконані на прикладі параболічної оболонки, яка моделює обтічник ракети-носія [3, 4]. Згідно з [3, 4] вихідні данні такі: $E = 7.2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$; $R = 2 \text{ м}$, $h = 5 \text{ мм}$. Розглянуто оболонки висотою $H = 1, 2$ та 4 м .

2.1. У першому дослідженні вивчаються збіжність і точність розв'язків щодо власних коливань оболонки обертання параболічної форми. Дослідження збіжності розв'язків показало, що достатньою є відносно густа сітка 20×50 СЕ. Беручи до уваги складну форму коливань оболонок, за розрахункову прийнято модель з сіткою 40×50 СЕ. Виявлено, що у коловому напрямку необхідно використовувати більш густе розбиття, ніж у напрямку твірної. Для оболонок висотою $H = 2$ та 4 м виконано порівняння з наявними розв'язками робіт [3, 4] (табл. 1).

Таблиця 1

H	$\omega_i, \text{Гц}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2 м	[3, 4]	157.50	159.34	162.67	167.43	173.58
	МССЕ	162.57	162.69	164.48	164.83	168.47
	$\Delta \%$	3.2	2.1	1.1	-1.5	-2.9
4 м	[3, 4]	75.70	76.00	77.40	78.50	80.90
	МССЕ	77.83	78.30	79.89	81.06	84.84
	$\Delta \%$	2.8	3.0	3.2	3.3	4.9

Аналіз результатів розрахунків показав гарний збіг отриманих частот з наведеними в [3, 4] та якісний збіг форм коливань з формами, що приведені авторами. Деяку розбіжність у розв'язках, що не перевищує 5%, можна пояснити використанням у нашому дослідженні (з використанням МССЕ) уточнений тривимірний підхід із застосуванням просторового СЕ. Для цілої оболонки в [3, 4] частоти ω_i є кратними.

Для виявлення частот, які були вилучені (втрачені) при використанні розрахункової схеми у вигляді половини параболоїда з накладеними умовами симетрії, для оболонки висотою $H = 2 \text{ м}$ був виконаний розрахунок за допомогою програмного комплексу SCAD [11]. З цієї метою проведено аналіз частот для двох розрахункових схем оболонки: цілої (I варіант) та половини (II варіант). Результати аналізу наведені в табл. 2.

Аналіз форм коливань показав, що у першому випадку (I варіант) форма коливань для попарно близьких частот (кратних) є однаковою зі зміщенням у коловому напрямку на 90° . Розбіжність розв'язків, що отримані за допомогою МССЕ та ПК SCAD (II варіант), не перевищує 1%. Форми коливань повністю збігаються (рис. 5). Як і очікувалось, використання у розрахунковій схемі площини симетрії вилучає кратні форми коливань.

Таблиця 2

Метод розрахунку	$\omega_i, Гц$							
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
SCAD I варіант	162.33	162.37	162.91	162.94	162.79	162.86	164.97	165.06
SCAD II варіант	162.05		162.64		163.13		165.00	
MCCE	162.57		162.69		164.48		164.83	
$\Delta \%$	0.32		0.03		0.83		-0.10	

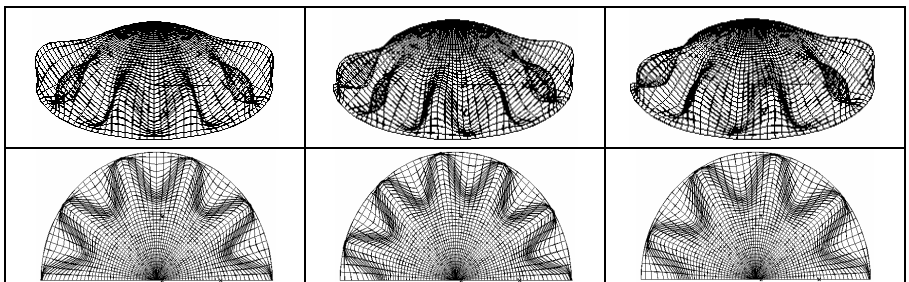
2.2. У другому дослідженні порівнюються параметри власних коливань оболонки при трьох значеннях висоти ($H = 1, 2$ та 4 м). Оболонка висотою $H = 2$ м прийнята за базу.

Таблиця 3

H	$\omega_i, Гц$				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 м	230.40	230.82	231.45	232.74	233.96
2 м	162.57	162.69	164.48	164.83	168.47
4 м	77.83	78.30	79.89	81.06	84.84
$\Delta^{H=4} \%$	-52.12	-51.87	-51.43	-50.82	-49.64
$\Delta^{H=1} \%$	41.72	41.88	40.72	41.20	38.87

Збільшення стріли підйому параболічної оболонки у 2 рази ($H = 4$ м) приводить до зменшення власних частот майже на 50% (табл. 3). При зменшенні висоти параболоїда у 2 рази ($H = 1$ м) величини відповідних частот зростають більше ніж на 40%. Слід відмітити, що у всіх випадках спектр нижчих власних коливань параболічних оболонок обертаня досить щільний.

Для оболонок різної висоти приведені форми коливань на рис. 4-6, які відповідають першим трьом частотам. Форми коливань для наочності на рисунках подані у збільшеному масштабі.

Рис. 4. Форми коливань параболоїда висотою $H = 1$ м

Видно, що характер коливань однаковий. Найбільші амплітуди коливань спостерігаються в середній частині оболонки ближче до затиснутого краю. У вершинній області хвилеутворення відсутнє. Для першої частоти ω_1 маємо різну кількість хвиль за колом, відповідно: 10 ($H=1\text{ м}$), 11 ($H=2\text{ м}$) і 8 ($H=4\text{ м}$).

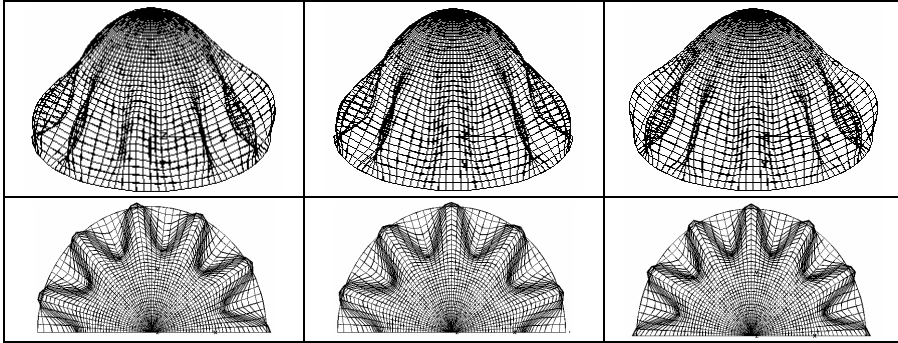


Рис. 5. Форми коливань параболоїда висотою $H = 2\text{ м}$

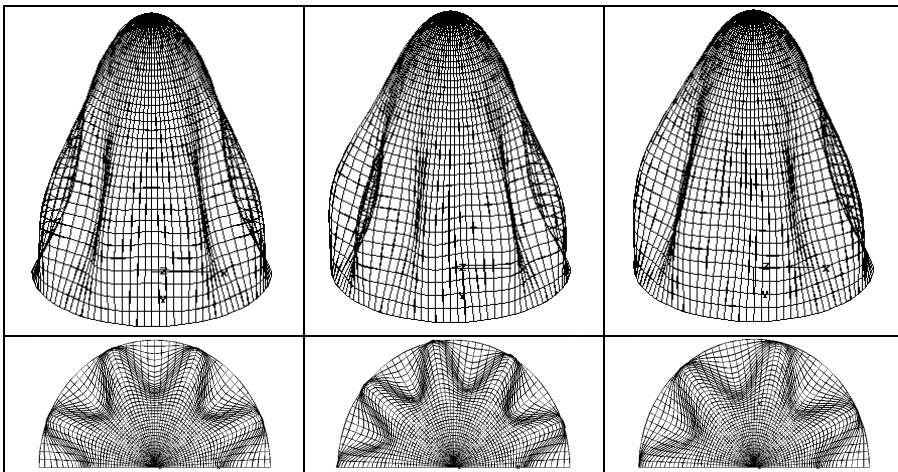


Рис. 6. Форми коливань параболоїда висотою $H = 4\text{ м}$

Висновки. У роботі досліджено параметри власних коливань параболічних оболонок обертання різної висоти. Дослідження проведені за допомогою скінченно-елементної методики, що спирається на використання універсального просторового скінченного елемента.

Досліджено збіжність і точність розв'язків. Порівняння результатів розрахунку, що отримані за моментною схемою скінченних елементів, з даними інших авторів показало достатньо гарний їх збіг.

Найбільші амплітуди спостерігаються у середній частині оболонки ближче до затиснутого краю. У вершинній області оболонки хвилеутворення

відсутнє. При послідовному збільшенні висоти параболоїда власні частоти коливань падають.

Оскільки під час експлуатації оболонкові конструкції часто зазнають різних змін температурного поля, що може значно вплинути на їхні динамічні характеристики, тому в наступних дослідженнях планується оцінити вплив нагріву на власні коливання параболічних оболонок сталої товщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кривошапко С.Н.* К вопросу о применении параболических оболочек вращения в строительстве в 2000-2017 годах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2017. – № 4. – С. 4-14.
2. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://habr.com/ru/post/410619/>.
3. *Чернобрышко М.В., Аврамов К.В., Романенко В.Н., Тонконоженко А.М., Батутина Т.Я.* Собственные колебания обтекателей ракет-носителей // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2013. С. 15 – 18.
4. *Чернобрышко М.В., Аврамов К.В.* Собственные колебания параболических оболочек // Мат. методы та фіз.-мех. поля, 2014. – 57, № 3. – С. 78 – 85.
5. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
6. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
7. *Бате К., Вилсон Р.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. *Новозhilov В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
9. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С. 96-113.
10. *Bazhenov V., Krivenko O.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbruken, Deutschland, 2018. – 97 p.
11. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский, Э.З. Крикунов, А.А. Маларенко, М.А. Микитаренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер – М.: "СКАД СОФТ", 2012. – 656 с.

REFERENCES

1. *Krivoshapko S.N.* K voprosu o primeneniі parabolicheskikh obolochek vrascheniya v stroitelstve v 2000-2017 godah // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy, 2017. – № 4. – S. 4-14.
2. [Elektronnyy resurs] – Rezhym dostupu: <https://habr.com/ru/post/410619/>
3. *Chernobryvko M.V., Avramov K.V., Romanenko V.N., Tonkonozhenko A.M., Batutina T.Ya.* Sobstvennyie kolebaniya obtekatel'ey raket-nositel'ey // Visnyk SevNTU: zb. nauk. pr. Vyp. 137/2013. Seriya: Mekhanika, enerhetyka, ekolohiia. – Sevastopol, 2013. S. 15 – 18.
4. *Chernobryvko M.V., Avramov K.V.* Sobstvennyie kolebaniya parabolicheskikh obolochek // Mat. metody ta fiz.-mekh. polia, 2014. – 57, № 3. – S. 78 – 85.
5. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O.* Nelineynoe deformuvannya ta stiykist pruzhnykh obolonok neodnorodnoyi strukturi. – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
6. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoyi strukturi: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi. – M.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
7. *Bate K., Wilson R.* Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov. – M.: Stroyizdat, 1982. – 448 p.
8. *Novozhilov V.V.* Teoriya tonkikh obolochek. – L.: Sudpromgiz, 1962. – 431 s.

9. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Legostaev A.D.* Stiykist i vlasni kolivannya neodnorodnih obolonok z urahuvannyam napruzhеного стану // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn.* – К.: KNUBA, 2015. – Вуп. 95. – S. 96-113.
10. *Bazhenov V., Krivenko O.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbruken, Deutschland, 2018. – 97 p.
11. SCAD Office. Vychislitel'nyy kompleks SCAD / *V.S. Karpilovskiy, E.Z. Kriksunov, A.A. Malyarenko, M.A. Mikitarenko, A.V. Perel'muter, M.A. Perel'muter* – М.: "SKAD SOFT", 2012. – 656 s.

Стаття надійшла 28.03.2019

Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V.

MODAL ANALYSIS OF THIN PARABOLIC SHELLS

The modal analysis of parabolic shells of revolution is based on using the finite-element model of inhomogeneous shell. The shells can have complex-shaped midsurface, geometrical features throughout the thickness, or multilayer structure. To develop the finite-element shell model we approximate a thin shell by one spatial finite element throughout the thickness. The structural elements of an inhomogeneous shell require the finite element to be universal: it should be eccentrically arranged relative to the mid-surfaces of the casing, it should be possible to vary the thickness of the lateral edges of the finite element and etc. The universal finite element is based on an isoparametric spatial finite element with polylinear shape functions for coordinates and displacements. Additional variable parameters are introduced to enhance the capabilities of the modified finite element. Two hypotheses are used to describe the features of the stress–strain state of a thin inhomogeneous shell. The static hypothesis assumes that the compressive stresses in the fibers throughout the thickness are constant. The nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line is used: a straight segment along the thickness remains straight though stretched or shortened during deformation. This segment is not necessarily normal to the mid-surface of the shell.

The stress–strain state of a shell and its structural elements is determined using the geometrically nonlinear equations of the three-dimensional theory of thermoelasticity. A linear elastic continuous medium with large displacements and small strains is used as a model whose properties correspond to the generalized Duhamel–Neumann law. To derive the governing finite-element equations for displacements the moment finite-element scheme is used. The moment finite-element scheme approximations of displacements and strains guarantee a correct description of the rigid-body displacements of finite elements, which enhances the convergence and accuracy of solutions on coarse meshes.

The natural vibrations of parabolic shells with various heights have been investigated. The convergence of solutions has been studied and compared with the results obtained by other authors.

During operation, realistic shell structures often undergo various changes in the temperature field. This can significantly affect their dynamic characteristics. Extension of this work to modal analysis of parabolic shells considering heating is currently being pursued.

Keywords: thin parabolic shell, universal solid finite element, vibrations.

Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Проведены исследования собственных колебаний оболочек вращения параболической формы. Методика анализа базируется на применении пространственного конечного элемента для моделирования тонкой упругой оболочки. Выполнено сравнение решений с результатами расчетов, полученными другими авторами.

Ключевые слова: тонкая параболическая оболочка, универсальный пространственный конечный элемент, собственные колебания.

УДК 539.3

Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В. Аналіз власних коливань тонких параболічних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 171-179.

Проведено дослідження власних коливань оболонок обертання параболічної форми. Виконано порівняння розв'язків з результатами розрахунків, що отримані іншими авторами. Табл. 2. Іл. 7. Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3

Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V. Modal analysis of thin parabolic shells // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2019. – Issue 102. – P. 171-179. – Ukr.

Modal analysis of parabolic shells of revolution was carried out. Comparison of solutions with the results of calculations obtained by other authors was given. Table 2. Fig. 7. Ref. 10.

УДК 539.3

Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В. Анализ собственных колебаний тонких параболических оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 102. – С. 171-179. – Укр.

Проведены исследования собственных колебаний оболочек вращения параболической формы. Выполнено сравнение решений с результатам расчетов, полученными другими авторами. Табл. 2. Ил. 7. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки БАЖЕНОВ Віктор Андрійович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29.

мобільний тел.: +38(067)111-22-33

E-mail: vikabazh@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29.

мобільний тел.: +38(066) 048-32-77

E-mail: olakop@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки ВОРОНА Юрій Володимирович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29.

мобільний тел.: +38(050)750-13-61

E-mail: yuvv@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТОГО ПОКРИТТЯ НА ВГНУТІЙ ДІЛЯНЦІ ДОРОГИ

В.В. Гайдайчук¹,

д-р техн. наук

О.О. Густєлев²**А.В. Радкевич³,**

д-р техн. наук

Л.В. Шевчук²,

канд. техн. наук

Н.В. Шлюнь²,

канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

²Національний транспортний університет,
вул. М. Омеляновича-Павленка 1, м. Київ. 01010

³Дніпровський національний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, м. Дніпро. 49010

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.180-190

Поставлена задача про чисельне дослідження термопружного деформування шаруватого покриття дороги на її вгнутих та прямолінійних ділянках. Сформульовані розв'язні рівняння, побудовані їх скінченно-елементні аналоги. Розглянуто випадки навантажень при різних значеннях геометричних, конструктивних та температурних параметрів.

Проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень при дії температурних збурень. Оскільки при рівномірному нагріванні (охолодженні) криволінійні шари подовжуються по-різному, то можна зробити висновок, що навіть при найменшій кривизні дороги проявляються властивості концентрації всіх напружень в зонах, які прилягають до кінців дороги. Причому, для прямолінійних доріг нормальні до поверхні контакту напруження практично рівні нулю. При збільшенні кривизни спостерігається збільшення значення нормального розтягуючого напруження по всій довжині дороги, що може привести тим самим до великої ймовірності відриву першого шару від другого.

Чисельними дослідженнями показано, що пікові значення поздовжніх напружень розтягу у верхньому шарі покриття і зсувних напружень, локалізованих між першим і другим шарами, можуть бути причиною спостережуваних на практиці утворення на дорозі на початковій стадії руйнування та подальшого перетворення їх на поперечні тріщини.

Ключові слова: Автомобільна дорога, дорожнє покриття, транспортні навантаження, термопружний стан, поле напружень.

1. Вступ. В останні роки на автомобільних дорогах спостерігається тенденція збільшення інтенсивності руху транспортних засобів і зростання частки великовантажних автомобілів. Факторами, що суттєво впливають на якість автомобільних доріг з асфальтобетонним покриттям, є кліматичні умови і теплові впливи, викликані добовими і сезонними змінами температури дорожніх покриттів. Оскільки існуючі мережі автомобільних доріг не розраховані на такі підвищені значення транспортних навантажень, ці чинники є основними причинами зменшення їх експлуатаційної довговічності. У зв'язку з цим досить актуальною є проблема розробки більш точних механічних і математичних моделей деформування і міцності

дорожніх одягів при їх різних конструктивних схемах, видах матеріалів і діях транспортних і термомеханічних навантажень.

Поля термопружного напруженого стану шаруватого покриття на вгнутих і опуклих ділянках дороги мають деякі відмінності порівняно з випадком прямолінійних дорожніх покриттів. Вони полягають у тому, що в прямолінійних конструкціях при нерівномірних за товщиною полів температури генеруються поля напружень [1-3, 9-11], в яких переважають напруження в напрямках, паралельних площині вільної поверхні, в той час як в напрямку нормалі до неї (тобто вздовж вертикалі) нормальні теплові напруження практично дорівнюють нулю. Проте, на криволінійних ділянках дороги це не так. Річ у тім, що навіть при рівномірному нагріванні (охолодженні) криволінійні шари подовжуються по-різному, їх подовження різні і для забезпечення спільності термопружних переміщень і деформацій елементи шарів деформуються також і вздовж нормалі, викликаючи додаткові напруження (хоч і невеликі), які прагнуть притиснути або відірвати шари один від одного. В зв'язку з цим представляється важливим проаналізувати як впливає викривлення дороги в вертикальній поздовжній площині на перерозподіл полів напружень при дії температурних збурень [1-3]. Для цього приймемо, що дорога викривлена по дузі кола і температура навколишнього середовища змінюється за вибраним законом. Для розв'язання задачі зручно використати циліндричну систему координат. Сформулюємо цю задачу стосовно до конструкції, що розглядається.

2. Основні співвідношення термопружного напруженого стану покриття дороги. Розглянемо задачу про розподілення полів напружень в чотирьохшаровому покритті дороги, яка викривлена по дузі кола в вертикальній площині. Виберемо три значення радіусів кривизни, рівних $R_1 = 974,5$ м (рис. 1 (а)), $R_2 = 189,5$ м (рис. 1 (б)) і $R_2 = 97,5$ м (рис. 1 (в)).

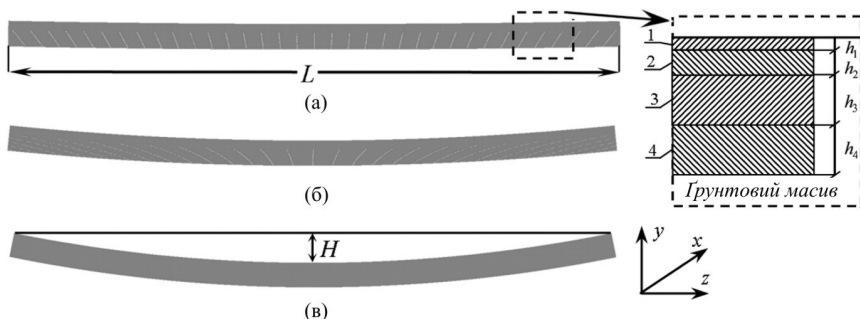


Рис. 1. Профілі дорожніх покриттів в вертикальній поздовжній площині:

(а) – $R_1 = 974,5$ м, (б) – $R_2 = 189,5$ м, (в) – $R_2 = 97,5$ м

Товщини шарів складають $h_1 = 0,05$ м, $h_2 = 0,1$ м, $h_3 = 0,2$ м, $h_4 = 0,2$ м, їх матеріали, відповідно, асфальтобетон дрібнозернистий, асфальтобетон пористий крупнозернистий, щебінь і пісок. Їхні параметри пружності склали $E_1 = 5 \cdot 10^9$ Па, $\mu_1 = 0,2$, $E_2 = 1,4 \cdot 10^9$ Па, $\mu_2 = 0,25$,

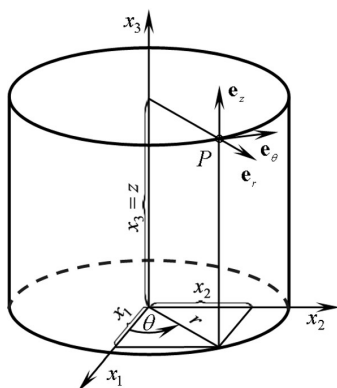


Рис. 2. Циліндрична система координат

$E_3 = 0,4 \cdot 10^9$ Па, $\mu_3 = 0,3$, $E_4 = 0,1 \cdot 10^9$ Па, $\mu_4 = 0,3$. Довжина L ділянки, яка вибрана для розрахунку задавалась рівною $L = 39$ м, для порівняння розглянемо також випадок $L = 15$ м.

Для розрахунку цієї конструкції зручно сформулювати розв'язувальні рівняння в циліндричній системі координат r , θ , z . Тут r направлена в радіальному напрямі, θ – кутова змінна, направлена в коловому напрямі, z – в поперечному напрямі по відношенню до дороги (рис. 2). Рівняння рівноваги пружного елемента [8] мають вигляд (1) – (3)

$$\mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] + F_r = 0, \quad (1)$$

$$\mu \nabla^2 u_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \theta} - \mu \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\varepsilon_{kk}}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] + F_\theta = 0, \quad (2)$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] + F_z = 0. \quad (3)$$

Тут λ і μ – параметри Ламе, u_r , u_θ , u_z переміщення в напрямку відповідних змінних r , θ , z , T_0 – початкове значення температури, T – її поточне значення.

Наведемо також рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4)$$

Граничні умови для функцій, які описують деформовані покриття, задавались в формі вільних поверхонь на верхній і бічних поверхнях, внизу конструкція зв'язана з ґрунтовим масивом. При розв'язанні вважалось, що на верхній вільній поверхні покриття температура змінювалась за заданим законом і розв'язувалось рівняння теплопровідності (4).

За знайденими функціями температури T і переміщень u_r , u_θ , u_z за допомогою формул

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_\theta &= 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}; \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}; \sigma_{z\theta} = 2\mu\varepsilon_{z\theta}\end{aligned}\quad (5)$$

(де $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$) визначаються всі

напруження у всіх елементах системи.

3. Температурні деформації шаруватих покриттів на криволінійних ділянках. Розв'язання рівнянь термопружного деформування (1) – (3) виконувалися методом скінченного елемента [1-3, 5, 8]. В процесі моделювання перший шар розбивався на 10 скінченних елементів за товщиною, другий шар – на 20 елементів, третій – на 40 елементів і четвертий – на 40 елементів.

Розв'язання рівнянь теплопровідності [4,6], виконано методом скінченних елементів для прямолінійного дорожнього покриття [4, 11, 12]. Матеріали шарів, їх товщини і механічні властивості обрані наступними: шар 1 – асфальтобетон дрібнозернистий, $h = 0,05$ м, $E = 5 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,2$; шар 2 – асфальтобетон пористий крупнозернистий, $h = 0,1$ м, $E = 1,4 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,25$; шар 3 – щебінь, $h = 0,2$ м, $E = 0,4 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,3$; шар 4 – пісок, $h = 0,2$ м, $E = 0,1 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,3$; ґрунт – $h = 2,5$ м, $E = 0,1 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,35$.

Показано, що функція температури $T(y)$ має вигляд крайового ефекту. Розподіл цієї функції, здебільшого, реалізується в границях першого і рідше, в границях першого і другого шарів, причому вона має вигляд майже прямої лінії. Оскільки нас цікавить тут головним чином явище розшарування, приймемо, що температура на поверхні першого шару рівна $T = -20^\circ\text{C}$ і далі поширюється лінійно в границях першого або першого і другого шарів. Далі методом скінченних елементів підраховуються за допомогою формул (1) – (3) переміщення у всіх елементах і з допомогою формул (5) обчислюються всі напруження. Оскільки, як і в інших випадках, функції температури швидко змінюються за товщиною (за координатою r), то поля напружень відрізняються великою нерівномірністю і великими значеннями.

При цьому найбільший інтерес представляють види функцій напружень на поверхнях контакту між першим і другим шарами, оскільки саме на них досягаються найбільші значення градієнтів функції температури і саме на них відбувається розшарування конструкції.

На рис. 3 показані графіки функцій $\sigma_r(l)$, $\sigma_\theta(l)$, $\sigma_z(l)$, $\sigma_{r\theta}(l)$ в залежності від змінної $R \cdot \theta = l$ для випадку $R = 974,5$ м, $L = 39$ м при різниці висот в центрі і на кінцях $H = 0,18$ м в тілі першого шару на поверхні

контакту першого шару з другим. Цей випадок відповідає найменшій кривизні дороги, проте вже і тут можна відзначити деякі особливості, які притаманні криволінійній дорозі. По-перше, різкіше проявляються властивості концентрації всіх напружень в зонах, які прилягають до кінців дороги. Причому, якщо для прямолінійних доріг нормальні до поверхні контакту напруження σ_y дуже малі (практично рівні нулю), то тут нормальні напруження σ_r більш помітні. Причому вони відмінні від нуля не тільки в прикордонній зоні і тому разом з суттєвими дотичними напруженням $\tau_{r\theta}$ (рис. 3 (г)) сприяють розшаруванню конструкції.

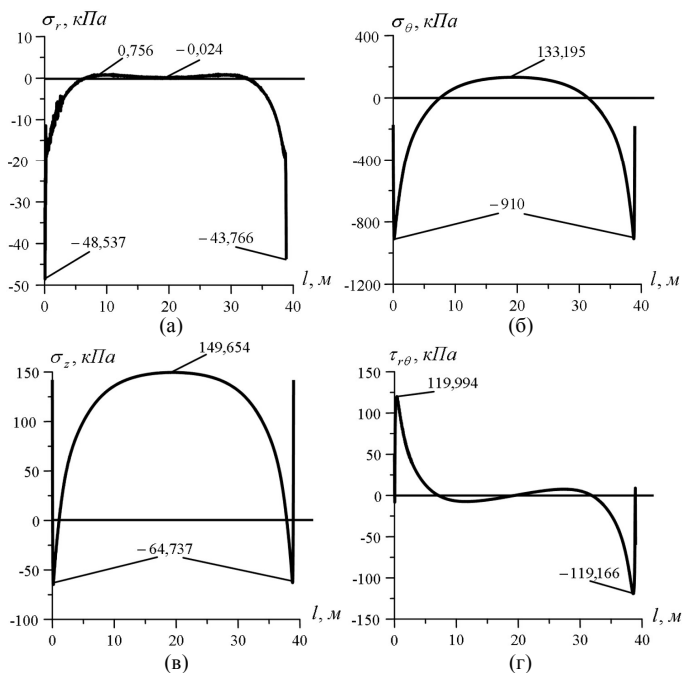


Рис. 3. Графіки функцій σ_r (а), σ_θ (б), σ_z (в) і $\tau_{r\theta}$ (г) в тілі першого шару на поверхні його контакту з другим шаром (випадок $R=974,5$ м, $L=39$ м, $H=0,18$ м)

Результати розв'язання, які представлені на рис. 4, відображають характер розподілу нормальних напружень у вертикальному перерізі дороги в її центральній частині, коли температура змінювалася від -20°C на верхній поверхні і вниз лінійно до нуля площини контакту другого і третього шарів. Дотичні напруження в цьому перерізі дорівнюють нулю в силу умов симетрії. Як видно, в даному випадку виникли, хоча і невеликі, радіальні напруження, які сприяють розшаруванню конструкції.

Результати розрахунків для дорожнього покриття великої кривизни ($R=189,5$ м, $L=39$ м, $H=0,94$ м) при лінійному розподілі в границях тільки першого шару (починаючи з -20°C) представлені на рис. 5.

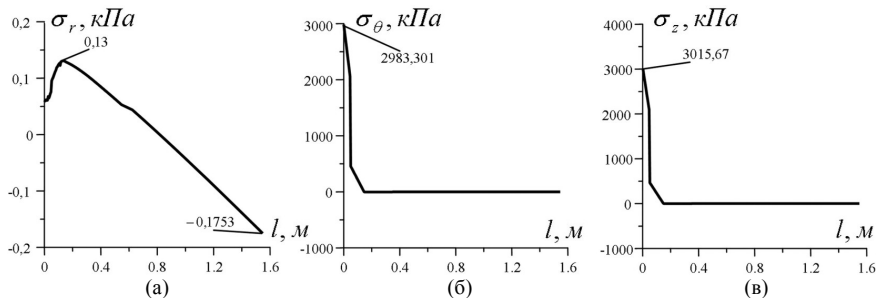


Рис. 4. Графіки функцій $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$, $\sigma_z(r)$ в залежності від радіальної координати r в центральному вертикальному перерізі дороги (випадок $R=974,5$ м, $L=39$ м, $H=0,18$ м)

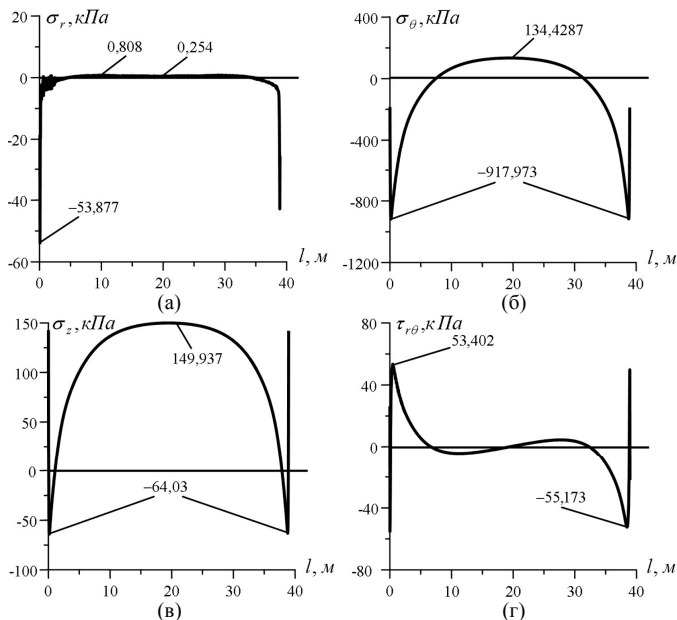


Рис. 5. Графіки функцій σ_r (а), σ_θ (б), σ_z (в) і $\tau_{r\theta}$ (г) в тілі першого шару на поверхні його контакту з другим (випадок $R=189,5$ м, $L=39$ м, $H=0,94$ м)

Як видно, із збільшенням кривизни відбулася деяка несуттєва перебудова всіх функцій напружень. Це можна пояснити тим, що ці функції побудовані на поверхні контакту першого і другого шарів, на якій знає розрив функція модуля пружності E контактуючих матеріалів. Тому тут всі функції напружень є швидко змінними за вертикаллю (за змінною r). Однак стало помітно, що збільшене значення нормального розтягуючого напруження $\sigma_r > 700$ Н стало переважати по всій довжині дороги, приводячи тим самим до великої ймовірності відриву першого шару від другого.

На рис. 6 показані функції розподілу напружень в центральному вертикальному перерізі конструкції для цього випадку, але при умові, що температура змінюється за лінійним законом в двох верхніх шарах конструкції. Як видно, тут напруження помітно збільшились.

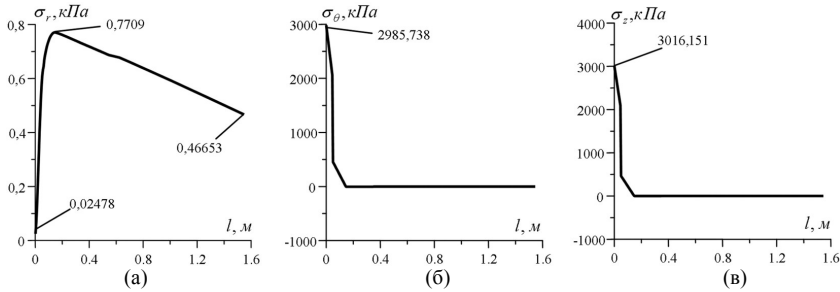


Рис. 6. Графіки функцій $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$, $\sigma_z(r)$ в залежності від радіальної координати r в центральному вертикальному перерізі дороги (випадок $R=189,5$ м, $L=39$ м, $H=0,94$ м, температура лінійно змінюється в границях двох верхніх шарів)

Рис. 7 відповідає випадку $R=97,5$ м, $L=39$ м, $H=1,9$ м. Тут температура лінійно розподіляється за товщиною в границях першого шару. Можна бачити, що помітно зросли напруження σ_r (а) і $\tau_{r\theta}$ (г), які відповідають за розшарування конструкції і відрив першого шару від другого, що відбувається (як і в інших випадках) в кінцевих зонах дороги.

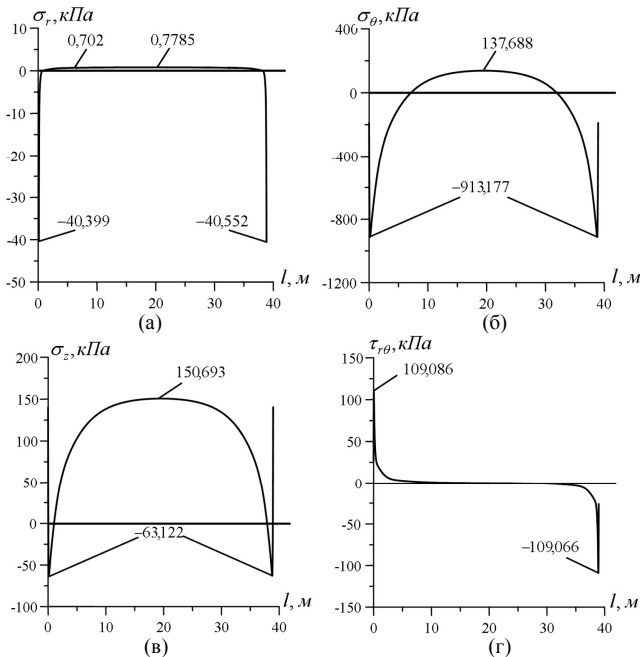


Рис. 7. Графіки функцій σ_r (а), σ_θ (б), σ_z (в) і $\tau_{r\theta}$ (г) в тілі першого шару на поверхні його контакту з другим (випадок $R=97,5$ м, $L=39$ м, $H=1,89$ м)

Якщо дорога прямолінійна і має лінійну довжину $L=15$ м, то функції розподілу нормальних і дотичних напружень відчують суттєві перебудови і зміни своїх значень. На рис. 8 представлені графіки нормальних до поверхні дороги напружень σ_x (а) і τ_{xy} (б) для випадку $L=15$ м, коли температура лінійно змінювалася в границях першого і другого шарів. Аналіз цих результатів дозволяє зробити висновок, що для розглянутої системи дотичні напруження суттєво зросли, однак вертикальне напруження при цьому виявилось практично рівним нулю (крім крайових зон), зменшивши ймовірність розшарування системи порівняно з випадком криволінійної дороги.

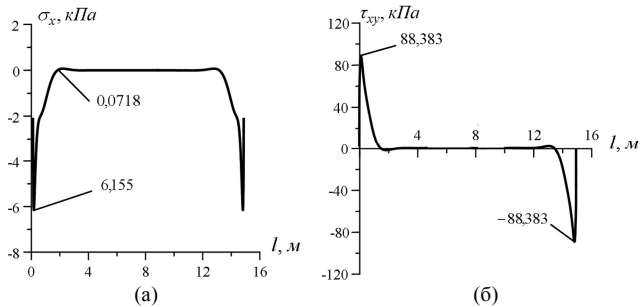


Рис. 8. Графіки функцій σ_x (а) і τ_{xy} (б) в тілі першого шару на поверхні контакту з другим шаром (прямолінійна дорога, $L=15$ м, температура лінійно змінюється в границях першого і другого шарів)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук В.В.* Моделювання напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу під дією транспортних навантажень / В.В. Гайдайчук, В.В. Мозговий, Ю.О. Заєць, Л.В. Шевчук // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2017. – Вип. 99 – С.45 – 57.
2. *Гуляєв В.І.* Дослідження термонапруженого стану конструкцій дорожнього одягу / В.І.Гуляєв, В.В.Гайдайчук, В.В. Мозговий, Ю.О.Заєць, Л.В. Шевчук // *Промислове будівництво та інженерні споруди.* – 2017. - №1. – С. 6 – 12.
3. *Гуляєв В.І.* Сезонний перерозподіл полів напружень в конструкціях шаруватих покриттів доріг під дією транспортних навантажень / В.І.Гуляєв, Л.В. Шевчук, О.М. Куцман // *Вісник Національного транспортного університету.* — 2018. — Вип. 40. — С. 98 – 105.
4. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. / А.Д. Коваленко – Киев: Наукова Думка, 1970. – 239 с.
5. *Механика горных выработок при действии гравитационных и динамических нагрузок: монография* / [В. И. Гуляев, П. З. Кошель, Ю. А. Заец и др.]. – Ивано-Франковск: Изд-во Прикарпат. нац. ун-та им. В. Стефаника, 2014. – 438 с.
6. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
7. *Перельмутер А.В.* О влиянии изменения жесткостей на перераспределение усилий в статически неопределимой системе / А.В. Перельмутер // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 1974. – № 5. – С. 64-67.
8. *Перельмутер А. В.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. / А. В. Перельмутер, В.И Сливнер - М.: ДМК Пресс, 2007. - 600 с.
9. *Krishnan J.M.* Review of the uses and modeling of bitumen from ancient to modern times. American society of mechanical engineers. / J.M. Krishnan, K.R. Rajagopal // *Appl Mech Rev.* – 2003. - 56(2). – P. 149–214.
10. *Litton R.L., Tsai F.L., Lee S.I., Luo R., Hu S., Zhou F.* «Models for Predicting Reflection Cracking of Hot-Mix Asphalt Overlays» Research Report 669, Texas Transportation Institute, Texas A&M University, College Station, Texas, 2010. P.61.

11. Radovskiy B., Teltayev B. Viscoelastic Properties of Asphalts Based on Penetration and Softening Point. Monograph. - Springer Nature, Switzerland, 2017. – 107 p.
12. Yoder E.J. Principles of pavement design. – New York. John Wiley & sons, INC. London. Chapman & Hall, Ltd.

REFERENCES

1. Gaydaychuk V.V., Mozgoviy V.V., Zaets Yu. A., Shevchuk L.V. Modeliuvannya napruzhenodeformovanoho stanu konstrukttsii dorozhnogo odiahu pid dieiui transportnykh navantazhen (Simulation of the stress-strain state of the construction of road overlay under the influence of transport loads) // Opir materialiv i teorii sporud – 2017. – V. 99, p. 45-57.
2. Gulyayev V. I., Gaydaychuk V.V., Mozgoviy V.V., Zaets Yu. A., Shevchuk L.V. Doslidzhennia termonapruzhenoho stanu konstrukttsii dorozhnogo odiahu (Investigation of the thermo-stressed state of road overlay structures) // Promyslove budivnytstvo ta inzhenerni sporudy – 2017. – No1, p. 6-12.
3. Gulyayev V. I., Shevchuk L.V., Kutsman O. M. Sezonnii pererozpodil poliv napruzhen v konstrukttsiakh sharuvatykh pokryttiv dorih pid dieiui transportnykh navantazhen (Seasonal redistribution of stress fields in structures of layered pavements of roads under the influence of transport loads) // Visnyk Natsionalnogo transportnogo universytetu – 2018. – V. 40, p. 98-105.
4. Kovalenko A.D. Osnovy termouprugosti (Fundamentals of Thermoelasticity). Kyiv: Naukova Dumka, 1970. – 239 P.
5. Gulyayev V. I., Koshel P. Z., Zaets Yu. A. Mehanika gorniy vyirabotok pri deystvii gravitatsionnykh i dinamicheskikh nagruzok: monografiya (Mechanics of mine cavities under the action of gravitational and dynamic loads). Yvano-Frankovsk: Prykarp. nats. un-ta ym. V. Stefanyka, 2014. – 438 P.
6. Novatskiy V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity). Moskva: Mir, 1970. – 256 P.
7. Perelmuter A.V. O vliyaniy izmeneniya zhestokostey na pereraspredeleniye usilyi v staticheski neopredelimoj sisteme (On the effect of stiffness changes on the redistribution of efforts in a statically indeterminate system) // Stroitelnaia mekhanika i raschet sooruzhenii – 1974. – No 5, p. 64-67.
8. Perelmuter, A.V., Slyvner, V.Y Raschetnyie medeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza (Design models of structures and the possibility of their analysis). Moskva: DMK Press, 2007. – 600 P.
9. Krishnan J.M. Review of the uses and modeling of bitumen from ancient to modern times. American society of mechanical engineers. / J.M. Krishnan, K.R. Rajagopal // Appl Mech Rev. – 2003. - 56(2). – P. 149–214.
10. Litton R.L., Tsai F.L., Lee S.L., Luo R., Hu S., Zhou F. «Models for Predicting Reflection Cracking of Hot-Mix Asphalt Overlays» Research Report 669, Texas Transportation Institute, Texas A&M University, College Station, Texas, 2010. P.61.
11. Radovskiy B., Teltayev B. Viscoelastic Properties of Asphalts Based on Penetration and Softening Point. Monograph. - Springer Nature, Switzerland, 2017. – 107 p.
12. Yoder E.J. Principles of pavement design. – New York. John Wiley & sons, INC. London. Chapman & Hall, Ltd.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Gaidaichuk V.V., Gustieliev O.O., Radkevich A.V., Shevchuk L.V., Shlyun, N.V.

THERMAL ELASTIC DEFORMATION OF THE LAYERED COVERING ON THE CONCAVE PART OF A ROAD

The problem on numerical investigation of thermo-elastic deformation of a layered coating on the concave and rectilinear road parts is stated. The constitutive equations are formulated, their finite-element analogues are constructed. The load versions at different values of geometric, structural, and temperature parameters are taken into account.

The influence of the door curvature on redistribution of the stress fields under action of thermal perturbations are analysed. As in a uniform heating (or cooling) the curvilinear layers change their lengths in different manure, then it can be supposed that even under small concentration in all direction of the road body are exhibited. At that, for the rectilinear segments of the roads, the stress, normal to the road surface, practically are equal to zero. With the curvature enlargement, the

enlargement of tensile normal stress throughout the road length is observed. This lead to enlargement of the probability of the breakaway of the first layer from the second one.

It is shown by numerous calculations that the peak values of the longitudinal ensile forces in the top layer and shear forces localized between the first and second layers can be a cause of the initial road destruction observed in practice and formation of transversal cracks.

Keywords: automobile road, road coating structure, transport loads, stress field, thermo elastic state.

Гайдайчук В.В., Густелев А.А., Радкевич А.В., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В.

ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ПОКРЫТИЯ НА ВОГНУТОМ УЧАСТКЕ ДОРОГИ

Поставлена задача о численном исследовании термоупругого деформирования покрытия на вогнутом и прямолинейном участках дороги. Сформулированы разрешающиеся уравнения, построены их конечно-элементные аналоги. Рассмотрены случаи нагрузок при различных значениях геометрических, конструктивных и температурных параметров.

Проанализировано влияние искривления дороги на перераспределение полей напряжений при воздействии температурных возмущений. Поскольку при равномерном нагреве (охлаждении) криволинейные слои удлиняются по-разному, то можно сделать вывод, что даже при малейшем изгибе дороги проявляются свойства концентрации всех напряжений в зонах, прилегающих к концам дороги. Причем, для прямолинейных дорог нормальные к поверхности контакта напряжения практически равны нулю.

Ключевые слова: автомобильная дорога, дорожное покрытие, транспортные нагрузки, поле напряжений, термонапряженное состояние.

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., Густелев О.О., Радкевич А.В., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. **Термопружне деформування шароватого покриття на вгнутій ділянці дороги** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 180-190.

Поставлена задача про чисельне дослідження термопружного деформування шароватого покриття дороги на її вгнутих та прямолінійних ділянках.

Іл. 8. Бібліогр. 12 назв.

UDC 539.3

Gaidaychuk V.V., Gusteliev O.O., Radkevich A.V., Shevchuk L.V., Shlyun N.V. **Thermal elastic deformation of the layered covering on the concave part of a road** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 180-190.

The problem on numerical investigation of thermo-elastic deformation of a layered coating on the concave and rectilinear road parts is stated.

Fig. 8. References 12 items.

Гайдайчук В.В., Густелев А.А., Радкевич А.В., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. **Термоупругое деформирование слоистого покрытия на вогнутом участке дороги** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2019. – Вып. 102. – С. 180-190.

Поставлена задача о численном исследовании термоупругого деформирования покрытия на вогнутом и прямолинейном участках дороги.

Іл. 8. Библиогр. 12 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної механіки КНУБА ГАЙДАЙЧУК Віктор Васильович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра теоретичної механіки, Гайдайчуку Віктору Васильовичу.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Миколи Закревського, 27/2, кв. 64.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-36;

Мобільний тел.: +38(097) 542-94-27;

E-mail: viktor_gaydaychuk@bigmir.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2059-7433>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): генеральний директор, ГУСТЄЛЄВ Олександр Олександрович.

Адреса робоча: 01014, м. Київ, вул. Петра Болбочана, 6, Комунальна корпорація «Київавтодор», ГУСТЄЛЄВУ Олександр Олександровичу.

Робочий тел.: +380 (44) 285 03 36.

Мобільний тел.: +380 (67) 640 00 05.

E-mail: gustelev_pao@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8257-358X>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, проректор з науково-педагогічної, економічної, інноваційної та перспективної діяльності ДНУЗТ, РАДКЕВИЧ Анатолій Валентинович.

Адреса робоча: 49010 Україна, м. Дніпро, вул. Лазаряна 2, ДНУЗТ, Радкевичу Анатолію Валентиновичу.

Робочий тел.: +38(098) 307-81-44.

Мобільний тел.: +38(095) 889-34-80.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, асистент кафедри вищої математики, ШЕВЧУК Людмила Володимирівна.

Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, ШЕВЧУК Людмилі Володимирівні.

Робочий тел.: +38(044) 284-71-09.

Мобільний тел.: +38(066) 715-36-33.

E-mail: ludmilashevchuk25@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5748-9527>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, асистент кафедри вищої математики, ШЛЮНЬ Наталія Володимирівна.

Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, ШЛЮНЬ Наталії Володимирівні.

Робочий тел.: +38(044) 284-71-09.

Мобільний тел.: +38(097) 593-63-46.

E-mail: nataliyashlyun@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1040-8870>

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЗАМКНЕНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

П.П. Лізунов,

д-р техн. наук

Е.З. Криксунов,

канд. техн. наук

О.М. Фесан,

канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.191-198

В даній роботі наведені співвідношення, що визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, замкнені конічні оболонки, обертальний рух, центральне силове поле.

Вступ. В будівельній техніці, машинобудуванні, авіабудуванні, космічній техніці та інших галузях народного господарства виникають задачі дослідження напружено-деформованого стану пластин, мембран та оболонок, що обертаються. Основним навантаженням, яке діє на елементи таких систем, є значні відцентрові сили інерції, які істотно впливають на міцнісні характеристики конструкцій.

В багатьох випадках вісь обертання механічних систем може здійснювати поворот, що призводить до виникнення не тільки переносних і відносних, а і коріолісових сил інерції, що змінюються періодично за часом. Гіроскопічна взаємодія між обертальним переносним рухом системи і відносними пружними коливаннями елементів є джерелом збудження прецесійних коливань, які можуть носити резонансний або нестійкий характер. Виникаючий при зміні осі орієнтації системи гіроскопічний момент викликає появу знакозмінних напружень, які істотно впливають на міцність та надійність елементів конструкцій.

В роботах [1, 3-10] досліджено напружено-деформований стан і коливання мембран, пластин та оболонок, що здійснюють складний рух в центральному силовому полі. В даній роботі виконано математичне моделювання напружено-деформованого стану системи двох складених конічних оболонок з центральною жорсткою вставкою при складному обертанні.

1. Розглянемо систему двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, що обертаються в протилежних напрямках в центральному силовому полі з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі симетрії OZ системи. На елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил, але при великих значеннях кутової швидкості власного обертання системи

гравітаційними навантаженнями можна знехтувати. Тоді інтенсивність інерційного навантаження на елемент оболонки визначається за формулою:

$$\vec{q}^I = -\rho h(\vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c), \quad (1.1)$$

де $\vec{a}^e, \vec{a}^r, \vec{a}^c$ - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорень елемента оболонки. Вектор переносного прискорення елемента кінчної оболонки, яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі симетрії, визначається формулою:

$$\vec{a}^e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (1.2)$$

де \vec{a}_0 - вектор прискорення центру мас системи. Векторний добуток $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ в базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ системи координат $OXYZ$ з початком в центрі мас системи має вигляд

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega\omega_0 & 0 & 0 \\ (R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau & (R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau & x_1 \sin \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j}(\omega\omega_0 x_1 \sin \alpha) + \vec{k}\omega\omega_0(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\tau = \omega t + x_2$ - фазова координата.

Для визначення $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ розкриємо добуток

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_0 & \omega \\ (R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau & (R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau & x_1 \sin \alpha \end{vmatrix} = \vec{i}[\omega_0 x_1 \sin \alpha -$$

$$-\omega(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau] + \vec{j}\omega(R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau + \vec{k}[-\omega_0(R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau]. \quad (1.4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_0 x_1 \sin \alpha - \omega(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau & \omega(R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau & \omega_0(x_1 \cos \alpha - R) \cos \tau \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{i}(R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau (\omega_0^2 + \omega^2) + \vec{j}[\omega\omega_0 x_1 \sin \alpha - \omega^2(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau] - \\ &= -\vec{k}[\omega_0^2 x_1 \sin \alpha - \omega\omega_0(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Додаючи вирази (1.3) та (1.5), отримуємо складові переносного прискорення в системі координат $OXYZ$:

$$\begin{aligned} a_X^e &= -(\omega_0^2 + \omega^2)(R-x_1 \cos \alpha) \cos \tau, \\ a_Y^e &= -\omega^2(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau, \\ a_Z^e &= -\omega_0^2 x_1 \sin \alpha + 2\omega\omega_0(R-x_1 \cos \alpha) \sin \tau. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Складові вектора переносного прискорення елемента оболонки в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд:

$$a_{x_1}^e = -a_X^e \cos \alpha \cos \tau - a_Y^e \cos \alpha \sin \tau + a_Z^e \sin \alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= (\omega_0^2 + \omega^2)(R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \cos^2 \tau + \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \sin^2 \tau - \\
&- \omega_0^2 x_1 \sin^2 \alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin \tau = \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha + \\
&+ 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin \tau + \omega_0^2 [(R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \cos^2 \tau - x_1 \sin^2 \alpha], \\
a_{x_2}^e &= -a_X^e \sin \tau + a_Y^e \cos \tau = (\omega_0^2 + \omega^2)(R - x_1 \cos \alpha) \sin \tau \cos \tau - \\
&- \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \tau \cos \tau = \omega_0^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \tau \cos \tau, \\
a_{x_3}^e &= -a_X^e \sin \alpha \cos \tau - a_Y^e \sin \alpha \sin \tau - a_Z^e \cos \alpha = (\omega_0^2 + \omega^2)(R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \cos^2 \tau + \\
&+ \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin^2 \tau + \omega_0^2 x_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \sin \tau = \\
&= \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha - 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin \tau + \\
&+ \omega_0^2 \sin \alpha [(R - x_1 \cos \alpha) \cos^2 \tau + x_1 \cos \alpha]. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Складові вектора відносного прискорення \vec{a}^r в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат, пов'язаної з елементом оболонки, дорівнюють відповідно

$$a_{x_1}^r = \ddot{u}; \quad a_{x_2}^r = \ddot{v}; \quad a_{x_3}^r = \ddot{\omega}, \tag{1.8}$$

де u, v, ω - переміщення елемента оболонки в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 .

Коріолісове прискорення визначимо в базисі $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ системи координат x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned}
\vec{a}^c &= 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}^r) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau & \omega_0 \cos \tau & -\omega \cos \alpha - \omega_0 \sin \alpha \sin \tau \\ \dot{u} & \dot{v} & \dot{\omega} \end{vmatrix} = \\
&= 2\{\vec{i}_1[\dot{\omega}\omega_0 \cos \tau + \dot{v}(\omega \cos \alpha + \omega_0 \sin \alpha \sin \tau)] - \vec{j}_1[\dot{\omega}(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) + \\
&+ \dot{u}(\omega \cos \alpha + \omega_0 \sin \alpha \sin \tau)] + \vec{k}_1[\dot{v}(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) - u\omega_0 \cos \tau]\}. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Додаючи вирази (1.7), (1.8) та (1.9), отримаємо складові вектору абсолютного прискорення в системі координат $x_1 x_2 x_3$:

$$\begin{aligned}
a_{x_1} &= \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin \tau + \omega_0^2 [(R - x_1 \cos \alpha) \times \\
&\times \cos \alpha \cos^2 \tau - x_1 \sin^2 \alpha] + \ddot{u} + 2[\omega\omega_0 \cos \tau + v(\omega \cos \alpha + \omega_0 \sin \alpha \sin \tau)], \\
a_{x_2} &= \omega_0^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \tau \cos \tau + \ddot{v} - 2[\omega(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) + \\
&+ u(\omega \cos \alpha + \omega_0 \sin \alpha \sin \tau)], \\
a_{x_3} &= \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha - 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \sin \tau + \omega_0^2 [(R - x_1 \cos \alpha) (\cos^2 \alpha) \times \\
&\times \cos^2 \tau + x_1 \cos \alpha] + \ddot{\omega} + 2[v(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) - u\omega_0 \cos \tau]. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

У випадку, коли кутова швидкість власного обертання оболонки набагато більше кутової швидкості обертання центру мас системи

($\omega \gg \omega_0$), вираз для проекції інерційного навантаження, що діє на конічну оболонку, буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} q_{x_1} &= -\mu h a_{x_1} = -\mu h \left\{ \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \alpha \sin \tau + \dot{u} + \right. \\ &\quad \left. + 2[\dot{w}\omega_0 \cos \tau + \dot{v}(\omega \sin \alpha \sin \tau)] \right\}, \\ q_{x_2} &= -\mu h a_{x_2} = -\mu h \left\{ \dot{v} - 2[\dot{w}(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) + \dot{u}(\omega \cos \alpha + \omega_0 \sin \alpha \sin \tau)] \right\}, \\ q_{x_3} &= -\mu h a_{x_3} = -\mu h \left\{ \omega^2 (R - x_1 \cos \alpha) \sin \tau - 2\omega\omega_0 (R - x_1 \cos \alpha) \cos \alpha \sin \tau + \dot{w} + \right. \\ &\quad \left. + 2[\dot{v}(\omega \sin \alpha - \omega_0 \cos \alpha \sin \tau) - u\omega_0 \cos \tau] \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Диференціальні рівняння руху безмоментної конічної оболонки в криволінійній системі координат x_1, x_2, x_3 мають вигляд [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{x_1} (N_{11} - N_{22}) + q_{x_1} &= 0, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{2}{x_1} N_{12} + q_{x_2} &= 0, \\ N_{11} k_1^* + N_{22} k_2^* + q_{x_3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $k_1^* = k_1 - \alpha_1$; $k_2^* = k_2 - \alpha_2$; k_1, k_2 - кривини серединної поверхні оболонки до деформації; α_1, α_2 - зміни кривин.

Радіальні, оружні і дотичні зусилля визначаються формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}), \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}), \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1-\nu)} \epsilon_{12}. \quad (2.2)$$

Обчислимо деформації серединної поверхні та параметри зміни кривизни, враховуючи, що $k_1 = 0, k_2 = \operatorname{tg} \alpha / x_1$:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{u}{x_1} - \frac{w \operatorname{tg} \alpha}{x_1}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{v}{x_1}. \quad (2.3)$$

Тут u, v, w - переміщення точок серединної поверхні в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 .

Зміни кривин визначимо за формулами:

$$\alpha_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad (2.4)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{x_1^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{1}{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x_1^2 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (2.5)$$

Вирази для зусиль з урахуванням співвідношень (2.3) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\nu}{x_1} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_1} + u - \omega \operatorname{tg} \alpha \right) \right], \\ N_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u - \omega \operatorname{tg} \alpha \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right], \end{aligned}$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{v}{x_1} \right). \quad (2.6)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{v}{x_1^2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u - w \operatorname{tg} \alpha \right) + \frac{v}{x_1} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \operatorname{tg} \alpha \right) \right], \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} &= \frac{h}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{1}{x_1^2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2} - v \right) + \frac{1}{x_1} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \operatorname{tg} \alpha \right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right].$$

З урахуванням співвідношень (2.6), (2.7) система (2.1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{x_1} \left(u + \frac{3-\nu}{2 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} - w \operatorname{tg} \alpha \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{x_1} \left(\frac{1+\nu}{2 \cos \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1-\nu}{2 x_1^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right\} + q_{x_1} = 0, \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \left[\frac{1+\nu}{2 \cos \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1-\nu}{2 x_1} v + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{x_1 \cos \alpha} \left(\frac{3-\nu}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \right\} + q_{x_2} = 0, \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{v}{x_1} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{x_1 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u - w \operatorname{tg} \alpha \right) \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{x_1 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x_1 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] \right\} + q_{x_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Висновки. Диференціальні рівняння (2.8) визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В.А. Колебания вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой /В.А.Баженов, В.И.Гуляев, С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов //Проблемы прочности. – 1986. - № 6. – С. 108-113.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

3. Гром А.А. Прецессионные колебания пластин и оболочек при сложном движении /А.А.Гром, П.П.Лизунов, Н.А.Снежко // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 7. – С. 652-56.
4. Гуляев В.И. Колебания вращающейся круговой мембраны в поле инерционных и гравитационных сил /В.И.Гуляев, С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов // Прикладная механика. – 1986. – 22, № 11. – С. 112-117.
5. Гуляев В.И. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении /В.И.Гуляев, П.П.Лизунов. – К.: Вища школа, 1989. – 160 с.
6. Кравченко С.Г. Нелинейные колебания системы двух мембран с центральной жесткой вставкой /С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов // Сопrotivление материалов и теория сооружений. – 1986. – Вып. 49. – С. 11-14.
7. Лизунов П.П. Колебания составной конической оболочки при сложном вращении /П.П.Лизунов // Сопrotivление материалов и теория сооружений. – 1988. – Вып. 52. – С.22-27.
8. Лизунов П.П. Колебания мембранной поверхности космического видбывача /П.П.Лизунов, А.А.Гром // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2002. – Вып. 71. – С. 146-152.
9. Лизунов П.П. Пружна рівновага сферичної оболонки в центральному силовому полі /П.П.Лизунов // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вып. 91. – С. 84-87.
10. Лизунов П.П. Колебания сферичной оболочки в центральном силовому полі / П.П.Лизунов // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вып. 93. – С. 37-42.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A. Kolebaniya vrashchayushchegosya membrannogo diska s tsentral'noy zhestkoy vstavkoy (Oscillations of a rotating membrane disk with a central rigid insert) /V.A.Bazhenov, V.I.Gulyayev, S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov // Problemy prochnosti. – 1986. - № 6. – S. 108-113.
2. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruyemykh system (Stability of deformable systems). (– M.: Nauka, 1967. – 984 s.
3. Grom A.A. ProtseSSIONnyye kolebaniya plastin i obolochek pri slozhnom dvizhenii (Precession oscillations of plates and shells with complex movement) /A.A.Grom, P.P.Lizunov, N.A.Snezhko // Prikladnaya mekhanika. – 1997. – 33, № 7. – S. 652-56.
4. Gulyayev V.I. Kolebaniya vrashchayushchegosya krugovoy membrany v pole inertsiONnykh i gravitatsiONnykh sil (Oscillations of a rotating circular membrane in the field of inertial and gravitational forces) /V.I.Gulyayev, S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov // Prikladnaya mekhanika. – 1986. – 22, № 11. – S. 112-117.
5. Gulyayev V.I. Kolebaniya sistem tverdykh i deformiruyemykh tel pri slozhnom dvizhenii (Fluctuations of solid and deformable bodies with complex motion) /V.I.Gulyayev, P.P.Lizunov. – K.: Vishcha shkola, 1989. – 160 s.
6. Kravchenko S.G. Nelineynyye kolebaniya sistemy dvukh membran s tsentral'noy zhestkoy vstavkoy (Nonlinear oscillations of a system of two membranes with a central rigid insert) /S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov // Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy. – 1986. – Вып. 49. – S. 11-14.
7. Lizunov P.P. Kolebaniya sostavnoy konicheskoy obolochki pri slozhnom vrashchenii (Oscillations of a composite conical shell under complex rotation) /P.P.Lizunov // Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy. – 1988. – Вып. 52. – S. 22-27.
8. Lizunov P.P. Kolyvannya membrannoyi poverkhnii kosmichnogo vidbyvacha (Fluctuations of the membrane surface of the space reflector) /P.P.Lizunov, A.A.Hrom // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2002. – Вып. 71. – S. 146-152.
9. Lizunov P.P. Pruzhna rinovaha sferychnoyi obolonki v tsentral'nomu sylovomu poli (Elastic equilibrium of a spherical shell in a central force field) /P.P.Lizunov // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2013. – Вып. 91. – S. 84-87.
10. Lizunov P.P. Kolyvannya sferychnoyi obolonki v tsentral'nomu sylovomu poli (Oscillations of a spherical shell in a central force field) / P.P.Lizunov // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2014. – Вып. 93. – S. 37-42.

Стаття надійшла до редакції 29.03.2019 р.

Lizunov P.P., Kriksunov E.Z., Fesan O.M.

STRESS-STRAIN STATE OF CLOSED CONICAL SHELLS UNDER COMPLEX ROTATION

In construction machinery, engineering, aircraft engineering, space technology and other branches of the national economy there are problems of studying the stress-strain state of plates, membranes and rotating membranes. The main load on the elements of such systems is the significant centrifugal forces of inertia, which significantly affect the strength characteristics of structures.

In many cases, the axis of rotation of mechanical systems can make a turn, which leads to the emergence of not only portable and relative, but also coriolis forces of inertia, which change periodically over time. The gyroscopic interaction between the rotational motion of the system and the relative elastic oscillations of the elements is a source of excitation of precessional oscillations that can be resonant or unstable. As a result of changing the orientation axis of the system, the gyroscopic moment causes the appearance of alternating stresses, which significantly affect the strength and reliability of the structural elements.

In the works [1, 3-10] the stress-strain state and oscillations of membranes, plates and shells carrying complex motion in the central force field are investigated. In this paper, the relations that determine the stress-deformed state of the system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which rotates with a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, whose center of mass moves in the central force field are given.

Key words: stress-strain state, closed conical shells, rotational motion, central force field.

Лизунов П.П., Криксунов Э.З., Фесан А.Н.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ ВРАЩЕНИИ

В данной работе приведены соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние системы двух замкнутых конических оболочек, соединенных центральной жесткой вставкой, вращающихся с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии системы, центр масс которой осуществляет движение в центральном силовом поле.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, замкнутые конические оболочки, вращательное движение, центральное силовое поле.

УДК 539.3

Лизунов П.П., Криксунов Э.З., Фесан О.М. **Напружено-деформований стан замкнених конічних оболонок при складному обертанні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 191-198.

Наведені співвідношення, що визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3

Lizunov P.P., Kryksunov E.Z., Fesan O.M. **Stress-strain state of closed conical shells under complex rotation** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 191-198.

The relations that determine the stress-strain state of the system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which are rotated with a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, whose center of mass moves in the central force field, are given.

Ref. 10.

УДК 539.3

Лизунов П.П., Криксунов Э.З., Фесан А.Н. Напряженно-деформированное состояние замкнутых конических оболочек при сложном вращении // Сопротивление материалов и теория сооружений: научно-тех. сборник. - К.: КНУБА, 2019. - Вып. 102. - С. 191-198.

Приведены соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние системы двух замкнутых конических оболочек, соединенных центральной жесткой вставкой, которые вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии системы, центр масс которой осуществляет движение в центральном силовом поле.

Библиогр. 10 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри основ інформатики КНУБА ЛІЗУНОВ Петро Петрович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра основ інформатики, ЛІЗУНОВ Петро Петрович.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Кавказька, 12, кв. 48.

Мобільний тел.: +38(067) 921-70-05;

E-mail: lizunov@knuba.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-3357-7020>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА ФЕСАН Олександр Миколайович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, ФЕСАН Олександр Миколайович.

УДК 539.3

ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ ВІДГУКУ ОДНОПОЛОГО ГІПЕРБОЛОЇДА НА ПЕРІОДИЧНЕ ПОВЗДОВЖНЄ НАВАНТАЖЕННЯ

О.М. Палій,
старший викладач

О.О. Лук'яченко,
канд. техн. наук, доцент

Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; (044) 2415420 e-mail: paliy.oxana@gmail.com

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.199-206

Виконано частотний аналіз усталених вимушених коливань тонкої оболонки від'ємної Гаусової кривизни виду однополого гіперboloїда при дії періодичного поздовжнього навантаження. За допомогою програмного комплексу скінченноелементного аналізу побудована розрахункова модель оболонки у вигляді сукупності плоских прямокутних оболонкових елементів зі шістьма степенями вільності у вузлах. Виконано модальний аналіз оболонки в лінійній постановці методом Ланцоша. Визначено власні частоти і форми коливань в нелінійній постановці для оболонки, на верхню кромку якої попередньо прикладена статична осьова докритична сила. Для цього послідовно розв'язані нелінійна задача статичної модифікованим методом Ньютона-Рафсона та задача на власні значення методом Ланцоша. Методами прямого та модального частотного аналізу отримано усталений відгук оболонки на періодичне поздовжнє навантаження. Відгуки оболонки подано у вигляді залежностей максимальних переміщень вузлів моделі від частоти збурення.

Ключові слова: усталені вимушені коливання, частотний аналіз, метод скінченних елементів, тонка оболонка, однополий гіперboloїд, поздовжнє навантаження.

Вступ. Гіперboloїд відноситься до пологих оболонок від'ємної Гаусової кривизни та використовується як елемент багатьох будівельних конструкцій. Кількість робіт, яка присвячена дослідженню статичної і динамічної поведінки однополого гіперboloїда з тонкою стінкою, порівняно мало. Аналіз вимушених коливань пологих оболонок від'ємної гаусової кривизни залишається важливим серед динамічних завдань теорії пластин і оболонок [1-9]. Особливістю усталених вимушених коливань є те, що вони не затухають з часом. Їх властивості залежать не тільки від динамічних характеристик оболонок, але і від амплітуди і частоти зовнішнього навантаження. Такі коливання можуть бути ініційовані силовим періодичним за часом навантаженням. Дослідження відгуків оболонок на зовнішнє навантаження може бути проведено як в часовому так і частотному просторі. Якісна оцінка відгуку на періодичні навантаження вимагає знання про динамічні характеристики оболонок, тобто їх власні частоти і форми коливань. При дослідженні усталених вимушених коливань урахування попереднього статичного навантаження на оболонки дозволяє оцінити його вплив на їх амплітудно-частотні характеристики.

В статті за допомогою методу скінченних елементів, що реалізовані в програмному комплексі NASTRAN [10] побудована розрахункова модель тонкої оболонки від'ємної гаусової кривизни виду однополого гіперboloїда. Виконано модальний аналіз тонкої оболонки в лінійній постановці (Normal Modes) методом Ланцоша. У нелінійній постановці визначені власні частоти і

форми коливань оболонки при статичній дії повздовжнього навантаження (Nonlinear Static, Modes_Param). Досліджено усталені вимушені коливання оболонки при дії періодичного за часом рівномірно розподіленого повздовжнього навантаження за допомогою прямого (Direct Frequency) і модального частотного методів (Modal Frequency), які реалізовані в програмному комплексі. Отримані амплітудно-частотні характеристики усталених відгуків тонкої оболонки без і з урахуванням попередньої дії статичного докритичного повздовжнього навантаження.

Побудова скінченноелементної моделі тонкої оболонки. В роботі

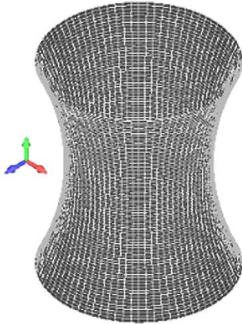


Рис. 1. Скінченно-елементна модель однополого гіперboloїда

розглядається сталева оболонка виду однополого гіперboloїда з товщиною стінки $h=0,002$ м, окружними радіусами $R=0,20$ м та $r=0,15$ м, висотою $H=0,48$ м. Фізичні параметри оболонки: коефіцієнт Пуасона $\mu=0,3$, модуль пружності $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Н/м². Граничні умови: на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому кінці задано ковзне кріплення вздовж твірної. Скінченноелементна модель оболонки побудована у вигляді сукупності плоских прямокутних оболонкових елементів зі шістьма степенями вільності у вузлах. Модель містить 6480 вузлів та 6400 елементів (рис. 1)

Математична модель вимушених коливань оболонки. Динамічна крайова задача формулюється згідно варіаційного принципу Лагранжа у вигляді системи диференціальних рівнянь, скінченноелементна апроксимація якої в матричній формі має вигляд

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (1)$$

де \mathbf{M} – матриця мас, \mathbf{C} – матриця демпфірування, \mathbf{K} – матриця жорсткості, $\mathbf{P}(t) = P_0 \sin \omega t$ – вектор зовнішнього періодичного повздовжнє навантаження, P_0 та ω – амплітуда та кругова частота зовнішнього збурення, $\mathbf{u}(t)$ – невідомий вектор переміщення вузлів скінченноелементної моделі, який залежить від часу. В статті матриця мас нормована по власних формах коливань і має вид одиничної діагональної матриці. Матриця жорсткості є також діагональною зі членами, що дорівнюють квадратам власних частот коливань. У випадку врахування дії статичного навантаження до лінійної матриці жорсткості \mathbf{K} додається геометрична \mathbf{K}_G . В дослідженнях вимушених коливань оболонки враховано внутрішнє демпфірування Релея, яке дозволяє представити матрицю демпфірування у вигляді діагональної.

Модальний аналіз оболонки в лінійній постановці. Модальний аналіз оболонки виконано за допомогою обчислювальної процедури розв'язання задачі на власні значення (Normal Modes) методом Ланцоша. Перші чотири власні форми коливань оболонки в меридіальному та радіальному напрямках і відповідні власні частоти коливань подано на рис. 2.

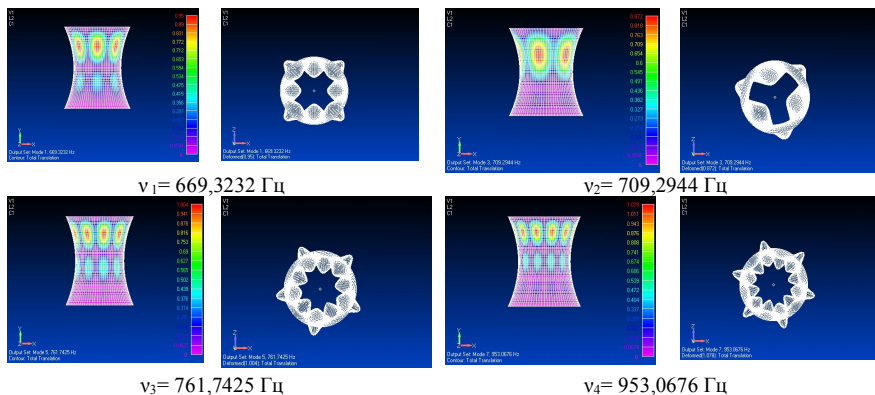


Рис. 2. Перші чотири власні форми та частоти коливань оболонки (Normal Modes)

Бачимо, що кількість півхвиль в меридіальному і радіальному напрямках змінюється. Спостерігаються як симетричні так і косиметричні власні форми коливань оболонки.

Модальний аналіз оболонки з урахуванням попередньої дії осового докритичного навантаження. Оцінено вплив на власну частоту коливань статичного осового

навантаження \bar{Q} , яке прикладалося до вулів верхньої кромки оболонки. Напочатку виконано нелінійний статичний аналіз методом Ньютона-Рафсона (Nonlinear Static), а потім за допомогою метода Ланцоша визначені власні значення частот і форм коливань оболонки (Modes Param). Діапазон значень статичного навантаження лежить в докритичній зоні. Отримані результати представлені на рис. 3 та в табл. 1.

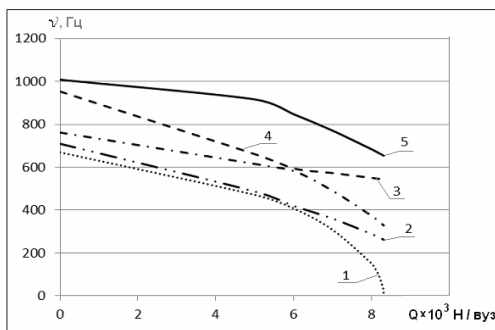


Рис. 3. Вплив статичного осового навантаження на власну частоту коливань: 1–першу, 2–другу, 3–треттю, 4–четверту, 5–п’яту

Таблиця 1

Залежність власної частоти від статичного осового навантаження

Номер частоти	Статичне осове навантаження, $Q \cdot 10^3$ Н/вузол								
	0	5	7	8	8.1	8.2	8.3	8.31	8.315
1	669.32	471.15	308.04	151.32	125.13	91.72	34.06	20.84	8.45
2	709.29	486.60	360.34	288.74	280.55	272.11	263.40	262.51	262.06
3	761.74	615.23	490.06	373.90	360.12	345.77	330.78	329.24	328.47
4	953.06	660.98	572.75	550.15	547.84	545.51	543.17	542.94	542.82
5	1008.08	916.35	770.55	683.77	674.38	664.84	655.15	654.17	653.68

При збільшенні навантаження власні частоти коливань оболонки зменшуються. Перша власна частота стає нульовою, що відповідає втраті стійкості оболонки по першій формі коливань, при уточненому значенні осевого навантаження $Q_{cr1}=8.315985 \cdot 10^3$ Н/вузол.

Частотний аналіз відгуку оболонки. Розглянуто один з видів динамічного аналізу, який служить ефективним методом знаходження усталеного відгуку (переміщень, напружень та інш.) в залежності від частоти періодичного збурення (1). Застосовано два методи розв'язання задачі: прямого частотного аналізу усталеного відгуку на періодичне збурення (Direct Frequency), в якому навантаження є синусоїдальною хвилею з відомими амплітудою, фазою і частотою; модального частотного аналізу (Modal Frequency), який аналогічний попередньому, але з використанням утриманих в розрахунках форм і частот коливань оболонки.

В статті розглянуто діапазони власних частот коливань оболонки, які наведені в табл. 1 (при $Q=0$, $Q=8100$ Н/вуз), амплітуді періодичного збурення $P_0=1000$ Н/вуз та нульовому значенні початкової фази коливань. На рис. 4 наведені криві залежностей максимальних радіальних переміщень (мм) вузла 2596 – вздовж осі x та вузла 69 – вздовж осі y від частоти (Гц) періодичного навантаження, які отримано методом прямого (а) і модального (б) частотного аналізу при $Q=0$.

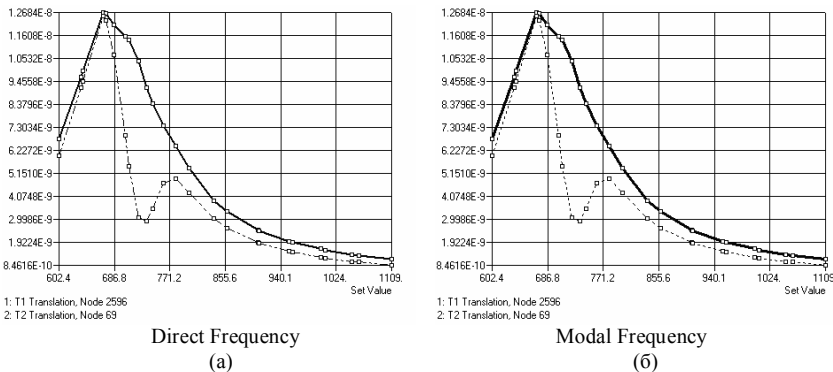


Рис. 4. Залежність максимальних радіальних переміщень (вісь ординат) вузлів моделі оболонки від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при $Q=0$.

Бачимо, що при наближенні частоти збурення до першої власної частоти коливань оболонки відбувається збільшення переміщень у двох вузлах моделі, при наближенні до третьої – збільшується лише переміщення вузла 69. Отримано аналогічні результати дослідження при використанні двох різних методів розв'язання задачі.

На рис. 5 представлені криві залежностей максимальних радіальних переміщень (мм) вузла 1526 – вздовж осі x та вузла 67 – вздовж осі y від частоти (Гц) періодичного навантаження, які отримано методами прямого (а) та модального (б) частотного аналізу при урахуванні попередньої дії статичного осевого докритичного навантаження $Q=8100$ Н/вуз. При наближенні частоти зовнішнього періодичного збурення до першої власної частоти коливань оболонки відбувається різке зростання переміщення у

двух вузлах моделі. При наближенні до другої відбувається наступний етап зростання та в незначній мірі до четвертої та п'ятої власних частот коливань. При виконанні прямого (а) та модального (б) частотного аналізу результати дослідження аналогічні.

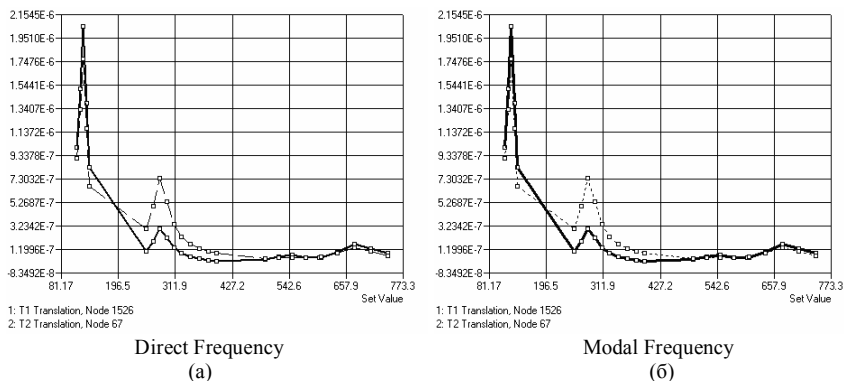


Рис. 5. Залежність максимальних амплітуд радіальних переміщень (вісь ординат) вузлів моделі оболонки від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при $Q=8100$ Н/вуз

Частотний аналіз із усталених відгуків однополюго гіперboloїда показав, що його чутливість на періодичне повздовжнє навантаження при урахуванні попередньої дії статичного осьового навантаження (рис. 5) є значно більшою, ніж без урахування (рис. 4).

Висновок. Прямий та модальний частотні аналізи усталених відгуків однополюго гіперboloїда на періодичне повздовжнє навантаження показали, що попереднє статичне докритичне навантаження зменшує власні частоти коливань оболонки і значно впливає на її динамічну поведінку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Физматгиз, 1967.-784 с.
2. *Абовский Н.П., Самольянов И. И.* К расчету пологой оболочки типа гиперболического параболоида// Строит, механика и расчет сооружений. -1969, №6, с. 7-12.
3. *Рассказов А.О.* Расчет оболочек типа гиперболических параболоидов. – Киев, 1972. 175 с.
4. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.О.* Устойчивость нелинейных механических систем. Львов, Вища школа, 1982. – 255 с.
5. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
6. *Куричук А.А., Палий О.Н.* Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов.-Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003. – С. 55-58.
7. *Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С. 145-185.
8. *Vazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.* Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading. Strength of Materials and Theory of Structures, 2018. – Вип. 100, С. 27-39.
9. *Лук'яненко О.О., Палий О.М.* Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни. Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн., К.: КНУБА, 2018. – Вип. 101, С. 45-59.
10. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. М.: НТ Пресс, 2004.– 552 с.

REFERENCES

1. *Volmir A.S.* Ustoychivost deformiruemykh sistem (Stability of deformable systems). – M.: Fizmatgiz, 1967. – 784 s. (rus)
2. *Abovskiy N.P., Samolyanov I. I.* K raschetu pologoy obolochki tipa giperbolicheskogo paraboloida (To the calculation of a shallow shell type hyperbolic paraboloid) // *Stroit, mehanika i raschet sooruzheniy.* – 1969, №6, S. 7-12. (rus)
3. *Rasskazov A.O.* Raschet obolochek tipa giperbolicheskikh paraboloidov (Calculation of shells like hyperbolic paraboloids). – Kiev, 1972. 175 s. (rus)
4. *Bazhenov V.A., Gulyaev V.I., Gotsulyak E.O.* Ustoychivost nelineynykh mekhanicheskikh sistem (Stability of nonlinear mechanical systems). Lvov, Vischa shkola, 1982. – 255 s. (rus)
5. *Samolyanov I.I.* Prochnost, ustoychivost i kolebaniya giperbolicheskogo paraboloida (Strength, stability and vibrations of a hyperbolic paraboloid). Lutsk.: Lutskiy industrialniy institut, 1993. – 316 s. (rus)
6. *Kirichuk A.A., Paliy O.N.* Chislennno-analiticheskiy metod issledovaniya ustanovivshisya kolebaniy obolocheknykh konstruksiy (Numerical-analytical method for studying steady-state oscillations of shell structures). *Matematicheskie modeli v obrazovanii, nauke i promyshlennosti: Sbornik nauchnykh trudov.-Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSh,* 2003. – S. 55-58. (rus)
7. *Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Dynamichna stiikist parametrychnykh kolyvan pruzhnykh system (Dynamic stability of parametric oscillations of elastic systems) // *Opir materialiv i teoriia sporud.* K.: KNUBA, 2015. Vyp. 95. – S. 145-185. (ukr)
8. *Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Kostina O.V.* Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading. *Strength of Materials and Theory of Structures,* 2018. – Vyp. 100, S. 27-39.
9. *Lukianchenko O.O., Paliy O.M.* Chyselne modeliuвання stiikosti parametrychnykh kolyvan tonkostinnoi obolonky vidiemnoi hausovoi kryvyzny (Numerical simulation of the stability of parametric oscillations of a thin-walled shell of distinct Gaussian curvature). *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.,* K.: KNUBA, 2018. – Vyp. 101, S. 45-59. (ukr)
10. *Ryichkov S.P.* MSC.visualNASTRAN dlya Windows (MSC.visualNASTRAN for Windows). M.: NT Press, 2004.– 552 s.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Paliy O.M., Lukianchenko O.O.

FREQUENCY ANALYSIS OF THE RESPONSE OF A ONE-SHEET HYPERBOLOID TO PERIODIC LONGITUDINAL LOADING

The frequency analysis of the steady state forced vibrations of a thin shell of negative Gaussian curvature is performed. The one-sheet hyperboloid shell is subjected to the action of the periodic longitudinal load. The finite element model for the shell is built using flat quadrilateral shell elements with six degrees of freedom per node. The modal analysis of the shell is performed by the Lanczos method using linear formulation of the problems. Eigenfrequencies and eigenmodes of the shell are also defined using nonlinear formulation of the problems that takes into account the effect of a longitudinal under critical static force preliminary applied to the top edge of the shell. For this purpose the nonlinear statics problems and the natural vibration problems are sequentially solved by the modified Newton-Raphson method and Lanczos method respectively. A modal analysis shows that dependence of the shell eigenfrequencies on the static longitudinal loading is nonlinear. The steady state response of the shell to the periodic longitudinal loading is obtained both by means of direct and modal frequency analysis. It turned out that sensitivity of the hyperboloid of one sheet to the periodic longitudinal loading considerably increases when the static under critical longitudinal loading is taken into account. The responses of the shell are presented in the form of amplitude frequency dependences of the finite element model nodes.

Keywords: forced vibrations, frequency analysis, finite element method, thin shell, one-sheet hyperboloid, longitudinal loading.

Палій О.Н., Лукьянченко О.А.

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ОТКЛИКА ОДНОПОЛОСНОГО ГИПЕРБОЛОИДА НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ ПРОДОЛЬНОЮ НАГРУЗКУ

Выполнен частотный анализ установившихся вынужденных колебаний тонкой оболочки отрицательной Гауссовой кривизны вида однополосного гиперboloида при действии периодической продольной нагрузки. С помощью программного комплекса конечноэлементного анализа построена расчетная модель оболочки в виде совокупности плоских прямоугольных оболочечных элементов с шестью степенями свободы в узлах. Выполнен модальный анализ оболочки в линейной постановке методом Ланцоша. Определены собственные частоты и формы колебаний в нелинейной постановке для оболочки, на верхнюю кромку которой предварительно приложена статическая осевая докритическая сила. Для этого последовательно решены нелинейная задача статики модифицированным методом Ньютона-Рафсона и задача на собственные значения методом Ланцоша. Модальный анализ показал, что зависимость собственных частот оболочки от статической осевой нагрузки нелинейна. Методами прямого и модального частотного анализа получен установившийся отклик оболочки на периодическую продольную нагрузку. Исследования показали, что чувствительность однополосного гиперboloида на периодическую продольную нагрузку при учете действия статической осевой докритической нагрузки значительно больше, чем без ее учета. Отклики оболочки представлены в виде зависимостей максимальных перемещений узлов модели от частоты возмущения.

Ключевые слова: установившиеся вынужденные колебания, частотный анализ, метод конечных элементов, тонкая оболочка, однополосный гиперboloид, продольная нагрузка.

УДК 539.3

Палій О.М., Лук'яненко О.О. **Частотний аналіз відгуку однополосного гіперboloида на періодичне повздожжє навантаження** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.

Виконано частотний аналіз установившихся вимушених коливань тонкої оболонки виду однополосного гіперboloида при дії періодичного повздожжєного навантаження із застосуванням процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Методами прямого і модального частотного аналізу досліджено відгук оболонки без і з урахуванням статичного осьового докритичного навантаження.

Табл. 1. Іл. 5. Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3

Paliy O.M., Lukianchenko O.O. **Frequency analysis of the response of a one-sheet hyperboloid to periodic longitudinal loading** / Strength of Materials and the Theory of Structures. – 2019. – Issue 102. – P. 199-206.

The frequency analysis of the steady state forced vibrations of a thin shell of negative Gaussian curvature is performed. The one-sheet hyperboloid shell is subjected to the action of the periodic longitudinal load. The shell response is investigated using both the direct and modal frequency analysis without and taking into account a static longitudinal loading.

Tab. 1. Fig. 5. References 10 items.

УДК 539.3

Палій О.Н., Лукьянченко О.А. **Частотный анализ отклика однополосного гиперboloида на периодическую продольную нагрузку** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 102. – С. 199-206. – Укр.

Выполнен частотный анализ установившихся вынужденных колебаний тонкой оболочки вида однополосного гиперboloида при действии периодической продольной нагрузки с помощью процедур программного комплекса конечноэлементного анализа. Методами прямого и модального частотного анализа исследован отклик оболочки без и с учетом статической осевой докритической нагрузки.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): старший викладач кафедри теоретичної механіки КНУБА, ПАПІЙ Оксана Миколаївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПАПІЙ Оксани Миколаївні.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-72.

Мобільний тел.: +38(067) 236-39-85.

E-mail: paliy.oxana@gmail.com

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Робочий тел.: +38(044) 245-40-20.

Мобільний тел.: +38(095) 727-18-25.

E-mail: lukianch0907@meta.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

УДК 531.66

МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ВИСОКОШВИДКІСНОГО УДАРНИКА З ЗАХИСНИМИ ПЕРЕШКОДАМИ

А.В. Ковтун,кандидат технічних наук, доцент¹**В.О. Табуненко,**кандидат технічних наук, доцент¹**С.І. Нестеренко,**кандидат технічних наук, доцент²¹Національна академія Національної охорони України,
Харків, майдан Захисників України 3, м. Харків, 61001²Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, вулиця Чкалова 17, м. Харків, 61070

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.207-219

В даній роботі розглянуто процес взаємодії високошвидкісного ударника з захисними перешкодами традиційного та нового типів. Досліджено механізм пробивання захисних перешкод. Наведені формули для визначення глибини проникнення ударника в захисну перешкоду традиційного типу. Запропоновані моделі визначення глибини проникнення ударника в перешкоду у вигляді набору порожнистих циліндрів. Наведені результати розрахунків та порівняння їх з результатами експериментів. Подальші дослідження пов'язані з врахуванням порушення конструктивної цілісності кулі зі сталевим сердечником і свинцевої оболонки, можливість якої необхідно враховувати при проектуванні захисних конструкцій.

Ключові слова: модель, броньовий захист, високошвидкісний ударник, захисна перешкода, деформація, порожстий циліндр.

Постановка проблеми. Не зважаючи на розробку зброї на нових фізичних принципах, на озброєнні сучасних армій знаходяться удосконалені традиційні види засобів ураження військ противника, що, в свою чергу, викликає продовження розробок сучасних засобів броньового захисту.

Сучасні засоби захисту мають шарувату конструкцію. Одним з шарів засобів захисту є стійка до високоенергетичному удару тканина, іншим, шар, що амортизує дію вражаючих елементів. Однак, основний удар високошвидкісних вражаючих елементів сприймають жорсткі пластини.

У зв'язку зі складністю фізичних процесів, що відбуваються при ударній дії в конструкції засобів захисту, розробка задовільних математичних моделей, які враховують хоча б основні характерні риси процесів, що розглядаються, представляє складну проблему, рішення якої поки отримано лише для найбільш простих випадків.

Тому актуальними залишаються задачі розробки сучасних засобів броньового захисту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У науковій літературі, найбільша увага приділяється визначенню потрібної товщини захисної перешкоди [1-5]. При цьому наголошується, що при взаємодії ударника з перешкодою з малими швидкостями інерційні сили дуже малі в порівнянні з характеристиками міцності елементів. Деформування охоплює всю

конструкцію і в основному носить пружний характер. При середніх швидкостях удару сили інерції можна порівняти зі статичним опором проникненню, деформування носить локальний характер і характеризується високими значеннями пластичної деформації і її швидкості. При високих швидкостях удару переважаючими стають інерційні сили, теча матеріалу взаємодіючих елементів наближається до гідродинамічної.

Практика застосування зброї показує, що процеси, які проходять при пробиванні перешкод, відрізняються великим різноманіттям і залежать від багатьох факторів. Основними з них є: швидкість і напрямок удару, розміри і форма ударників, конструкція і технологія виготовлення захисних засобів, фізичні і механічні властивості матеріалів ударників і захисних перешкод. Якісний аналіз, що проведений в роботі [6], показав, що одним з найбільш важливих з практичної точки зору і в той же час найбільш складним і слабо вивченим, залишається процес проникання ударників в перешкоди кінцевої товщі в діапазоні швидкостей взаємодії 500-2000 м/с. В цьому діапазоні швидкостей необхідно враховувати спротив деформуванню, який обумовлено багатьма нелінійними ефектами, пов'язаними з деформаційним і швидкісним зміцненням, фазовими перетвореннями, локалізацією деформації, пошкодженням і руйнуванням матеріалу перешкоди.

Достовірність прогнозу результатів ударної взаємодії ударника з перешкодою підвищується порівнянням результатів аналітичного і чисельного моделювання, а також даними натурних випробувань. За результатами такого порівняння уточнюються методики моделювання, моделі поведінки матеріалу та взаємодії елементів. Комплексне експериментально-розрахункове дослідження особливостей взаємодії ударників з перешкодами є найважливішою умовою надійного прогнозу результатів взаємодії елементів і може суттєво підвищити ефективність розробок конструктивних рішень. Така схема досліджень (вивчення поведінки елементів конструкцій при реальних умовах динамічного навантаження, чисельне і експериментальне моделювання) дозволяє створювати основи для розробки та обґрунтування рекомендацій по раціональному конструюванню, і вибору матеріалів, їх структурного стану, що забезпечує підвищення ефективності їх використання в конструкціях.

Різними дослідниками були отримані різні емпіричні формули, що враховують основні параметри удару [1] (формули Петрі, Нобіле, Сіаччі і Круппа, Гавра, Томпсона, Девіса, Березанська та ін.), засновані на експериментальних даних, отриманих при обстрілі листів броні при різних умовах, що звужує їх область застосування.

При цьому, в більшості досліджень звертається увага на механічні характеристики матеріалів і, в набагато меншому ступені, оцінюються конструктивні параметри перешкод. Загальним у відомих дослідженнях є те, що захисна перешкода представлена у вигляді пластини (набору пластин), тоді як одна із складових частин стрілецької зброї являє собою механічну систему, що складається з ударника (кулі) і стволу (оболонки).

Наведені дані свідчать про те, що теорія механічного взаємодії ударників з перешкодами різних видів не отримала свого повного завершення, процеси, що відбуваються при ударній взаємодії елементів механічних систем до кінця не вивчені, а застосовувані моделі і методи розрахунків залежать від необхідної точності отриманих результатів, при цьому не оцінюються конструктивні параметри перешкод. Подальше вдосконалення засобів індивідуального бронезахисту може бути досягнуто шляхом застосування оптимального поєднання нових матеріалів і сучасних конструктивно-схемних рішень.

Науковою основою досліджень процесу пробивання перешкод високошвидкісними ударниками є: теорії пружності, пластичності і міцності матеріалів, теоретичні основи забезпечення живучості особового складу підрозділів при веденні бойових дій, теорія надійності зразків озброєння, математичне моделювання, математичне планування експериментів.

Мета статті - дослідити процес взаємодії високошвидкісного ударника із захисною перешкодою традиційного типу та перешкодою у вигляді набору пустотілих циліндрів.

Основний матеріал. Процес проникнення ударника в традиційні захисні перешкоди об'єднує кілька фізичних механізмів. В цьому випадку присутні як стадія пов'язана з розсуванням матеріалу перешкоди, так і стадія вибивання пробки (відкол).

При ударі ударника по перешкоді традиційного типу (пластині) в ній виникає кілька типів хвиль збурень, що поширюються з різними швидкостями [1]. Ці збурення викликають в конструкції складний напружений стан, інтенсивність якого швидко знижується з часом (рис. 1).

Початкова стадія проникнення ударника в перешкоду визначається моментом часу, в перебігу якого ударник проникне в перешкоду на глибину близько двох своїх діаметрів. Протягом цього періоду для недеформованого ударника з конусоподібною головною частиною змінюється характер руху і напружено-деформований стан матеріалу перешкоди, а зусилля проникнення досягає сталого значення, відмінного від зусилля в поверхневих шарах. (В разі взаємодії ударника з порівняно міцною перешкодою на початковому етапі відбувається інтенсивне деформування головної частини ударника і утворення її нової форми).

Після досягнення деякої критичної глибини проникнення розмір кратера перестає змінюватися і починає формуватися основний канал каверни. Кінцевою стадією пробивання перешкоди вважається частина процесу пробивання, яка починається з моменту наближення ударника до

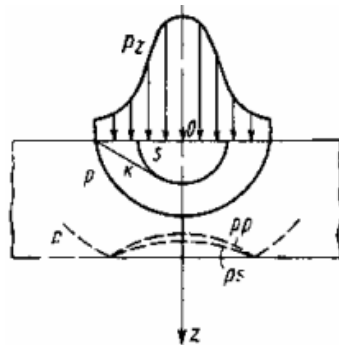


Рис. 1. Картина поширення хвиль напружень в перешкоді при ударі

тильної поверхні перешкоди на деяку критичну відстань і закінчується виходом ударника з перешкоди. Досягнення зазначеної відстані, пов'язане з виходом на тильну поверхню зони пластичності, викликає зміну напружено-деформованого стану взаємодіючих елементів.

При наближенні ударника до тильної поверхні перешкоди, в ній виникає зона розтягуючих радіальних і тангенціальних напружень у вигляді розширюваної конічної воронки. В результаті дії цих напружень в матеріалі можуть виникнути пошкодження або тріщини. Подальший рух ударника призводить до вилому частини матеріалу перешкоди (рис. 2).

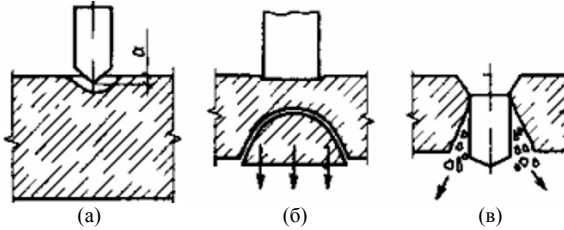


Рис. 2. Процес проникнення ударника в перешкоду

Дослідження процесу ударної взаємодії ударників з захисними перешкодами традиційного типу. Не дивлячись на те, що в наш час швидко розвиваються аналітичні та чисельні методи дослідження процесів проникання ударників в захисні перешкоди, емпіричні моделі все ж залишаються найбільш розповсюдженими.

При такому підході до рішення задач пробивання ударником захисних перешкод, звичайно зосереджують увагу на якому-небудь одному, найбільш важливому аспекті задачі. При цьому вводяться припущення, що облегшують отримання рішення в замкнутому вигляді. В основному ці методи розробляються з припущенням, що ударник є недеформованим. Основою служать закон збереження енергії або закон збереження кількості руху. Практично всі методи вимагають введення емпіричних констант. Тому для оцінки можливості застосування тієї чи іншої моделі проникання, необхідно провести її критичний аналіз і порівняння, отриманих на її основі результатів, з відомими представленнями про досліджуване явище. В роботі [6] відмічається, що емпіричні підходи до аналізу процесів проникання і пробивання відрізняються великою різнобарвністю, і для їх коректного використання необхідно виділити основні обмеження і накреслити область їх застосування.

В практиці переважає емпіричний підхід, який дозволяє на основі статистичної обробки експериментальних даних отримати прості і достатньо надійні розрахункові залежності.

Різними дослідниками були отримані різні емпіричні формули, що враховують основні параметри удару. Одна з відомих залежностей для визначення глибини впровадження ударника h в перешкоду, має вид [1]:

$$h = 10k\lambda \frac{G}{d^2} V_0, \quad (1)$$

де k - коефіцієнт, що характеризує фізико-механічні властивості перешкоди; λ - коефіцієнт, що залежить від форми головної частини ударника; G - вага ударника; d - діаметр ударника; V_0 - швидкість ударника.

В Національному оборонному дослідницькому комітеті США отримані, на основі аналізу результатів проведення великої кількості експериментів, наступні формули [1]:

$$h = \sqrt{4k\lambda Gd \left(\frac{V_0}{1000d}\right)^{1,8}} \quad \text{для } \frac{h}{d} \leq 2, \quad (2)$$

$$h = \left[k\lambda G \left(\frac{V_0}{1000d}\right)^{1,8} \right] + d \quad \text{для } \frac{h}{d} \geq 2. \quad (3)$$

Загальним недоліком наведених формул є грубе врахування властивостей перешкоди (пластини) єдиним коефіцієнтом. У всіх наведених формулах не витримується співвідношення розмірностей, у цих співвідношеннях відсутня фізична основа.

Більш точною є формула Томсона. Згідно з нею, повна енергія, поглинена пластиною в процесі її пластичної деформації при розширенні отвору, визначається наступним чином:

$$E_{\Sigma} = \pi R^2 h \left(\frac{1}{2} \sigma + \rho \left(\frac{V \cdot R}{L} \right) \right), \quad (4)$$

де R – калібр кулі, м; h – товщина шару перешкоди, що пробивається, м; $[\sigma]$ – граничне напруження конструкції, МПа; ρ – щільність матеріалу перешкоди, кг/м³; V – швидкість кулі, м/с; L – довжина кулі, м. Звідки:

$$h = \frac{E_{\Sigma}}{\pi R^2 \left[\frac{1}{2} \sigma + \rho \left(\frac{V \cdot R}{L} \right) \right]}. \quad (5)$$

За допомогою залежності (5) проведемо розрахунок товщини наскрізного пробивання металеві перешкоди зі сталі, сталюю кулею $R=0,00273$ м, що рухається зі швидкістю $V=600$ м/с; $L=0,012$ м; у сталеву перешкоду з параметрами $\sigma=1200$ МПа; $\rho=7800$ кг/м³.

Вважаємо, що повна енергія, поглинена пластиною в процесі її пластичної деформації при розширенні отвору $E_{\Sigma}=2700$ Дж.

При цих вихідних даних отримаємо: $h=0,19$ м.

Найбільш повна картина протікання процесу проникнення ударника в захисну перешкоду з урахуванням в'язко пластичних ефектів, обумовлених високою швидкістю деформації, наведена в роботі [6]. В цій роботі отримано вираз для визначення глибини проникання ударника в в'язко пластичне середовище. Цей вираз має наступний вигляд:

$$h = \frac{d\rho V^2}{f_v} \left[1 - \frac{f_{st}}{f_v} \ln \left(1 + \frac{f_v}{f_{st}} \right) \right], \quad (6)$$

де d - діаметр ударника, м; ρ - щільність матеріалу ударника, кг/м³; f_{st} - твердість матеріалу перешкоди, Па; $f_v = \frac{\mu V}{d}$; μ - коефіцієнт в'язкості, Па·с.

За допомогою виразу (6) визначимо товщину наскрізного пробиття пластини із сталі кулею зі сталевим сердечником $d = 0,00545$ м, що рухається зі швидкістю $V = 600$ м/с; $\rho = 7800$ кг/м³; $f_{st} = 17 \cdot 10^8$ Па; $f_v = 1,8 \cdot 10^8$ Па.

Вважаємо, що повна енергія, поглинена пластиною $E_{\Sigma} = 2700$ Дж.

В результаті розрахунку отримаємо: $h = 0,08$ м.

Аналіз результатів розрахунків дозволяє зробити висновок про те, що характер пробивання залежить від ряду факторів і, в першу чергу, від швидкості в момент удару.

Експериментальні дослідження по пробиттю металевих пластин з автомата АК-74 (з відстані 10 м) показали, що глибина проникнення кулі в перешкоду із сталі 3, складає $h = 0.021 \pm 0.001$ м, $P = 0,95$ (рис. 3). При цьому, результати експериментальних досліджень не співпадають з результатами розрахунків, що виконані за відомими формулами.



Рис. 3. Результати експериментальних досліджень по пробиттю металевих пластин з матеріалу Ст.3

Визначення глибини проникнення ударника в захисну перешкоду у вигляді набору пустотілих циліндрів.

Характер проникання ударника в перешкоду може змінитися, якщо ударник і перешкода будуть представляти вкладену конструкцію [7]. Розглянемо процес взаємодії ударника з перешкодою у вигляді набору пустотілих циліндрів, що мають верхню частину, яка розширюється, і циліндричну частину з діаметром меншим діаметра ударника (кулі) рис. 4.

При контакті ударника із зовнішнім шаром перешкоди, за рахунок наявності верхньої частини, що розширюється, ударник попадає в пустотілий циліндр, який щільно облягає бокову поверхню ударника, який рухається вздовж циліндра, що створює спротив його руху.

При контакті ударника із зовнішнім шаром перешкоди, за рахунок наявності верхньої частини, що розширюється, ударник попадає в пустотілий циліндр, який щільно облягає бокову поверхню ударника, який рухається вздовж циліндра, що

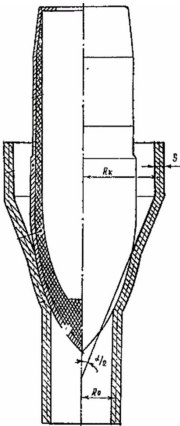


Рис. 4. Схема взаємодії кулі з пустотілим циліндром

створює спротив його руху. При русі ударника в циліндрі проходить перетворення кінетичної енергії ударника в енергію деформації циліндра та здійснення роботи по переборі сили тертя.

Визначимо глибину проникання ударника в циліндр для різних моделей ударної взаємодії таких конструкцій.

Для визначення глибини проникання ударника в циліндр використаємо рішення задачі Ламе [8-11].

Для випадку, коли товстостінний циліндр знаходиться тільки під дією внутрішнього тиску $p_B = p$, зовнішній тиск $p_H = 0$, радіальні σ_r і тангенціальні σ_θ напруження визначаються за формулами [11]:

$$\sigma_r = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \cdot \left(1 - \frac{r_H^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \cdot \left(1 + \frac{r_H^2}{r^2}\right), \quad (7)$$

де r_B - внутрішній радіус циліндра, r_H - зовнішній радіус циліндра, r - поточний радіус циліндра.

При $r = r_H$ $\sigma_r = 0$, а при $r = r_B$ $\sigma_r = -p$.

$$\sigma_\theta = \frac{p \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \cdot \left(1 + \frac{r_H^2}{r^2}\right), \quad (8)$$

$$\text{При } r = r_B \quad \sigma_\theta = \frac{p \cdot (r_B^2 + r_H^2)}{r_H^2 - r_B^2}, \quad \text{а при } r = r_H \quad \sigma_\theta = \frac{2 \cdot p \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}. \quad (9)$$

При виконанні розрахунків за 3-ю теорією міцності [11]:

$$\sigma_\theta = \frac{2 \cdot p \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma], \quad (10)$$

де $[\sigma]$ - гранична міцність матеріалу циліндра.

Граничне значення внутрішнього тиску $p_{\text{гран}}$, при умові, що $r_H \rightarrow \infty$:

$$p_{\text{гран}} = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (11)$$

Силу, під дією якої куля буде рухатися вздовж внутрішньої поверхні циліндра, визначимо за допомогою формули [11]:

$$F = f \cdot p_K \cdot \pi \cdot D \cdot l, \quad (12)$$

де f - коефіцієнт тертя між кулею і внутрішньою поверхнею циліндра; p_K - контактний тиск, Па; D - внутрішній діаметр циліндра, м; l - довжина кулі, м.

$$p_K = \frac{\delta \cdot E}{2 \cdot D}, \quad (13)$$

де δ - натяг, м; E - модуль пружності, Па.

Глибину проникнення кулі в циліндр визначимо за виразом:

$$h = \frac{E_\Sigma}{F}. \quad (14)$$

За допомогою залежностей (12-14) проведемо розрахунок шляху проникнення кулі в циліндр зі сталі, стальна куля $D = 0,005$ м, що рухається

зі швидкістю $V=600$ м/с; $L=0,02$ м; $\delta=0,0002$ м, $f=0,3$, у сталеву перешкоду з параметрами $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]=1,6 \cdot 10^5$ МПа.

Вважаємо, що повна енергія, поглинена циліндром в процесі його деформації при розширенні отвору $E_{\Sigma}=2700$ Дж.

При цих вихідних даних, отримаємо: $h=0,006$ м.

Але при цьому, умова (10) не виконується. Напруження

$$\sigma_{\theta} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \geq [\sigma].$$

Експериментальні дослідження по пробиттю перешкоди у вигляді пустотілих циліндрів з автомата АК-74 (з відстані 10 м) показали, що при проникненні кулі в циліндр, циліндр повздовжне розривався. Результати експериментів наведені на рис. 5.

Експериментальні дослідження підтверджують, що міцність циліндра, що працює при внутрішньому тиску, зі збільшенням товщини стінки зростає тільки до певної межі, оскільки навіть при нескінченно великому зовнішньому радіусі внутрішній тиск в циліндрі не може перевищувати певної величини. Виходячи з розрахунку на міцність по напрузі, що допускається, і відповідно до третьої теорією міцності будь-яке збільшення товщини стінки циліндра не

дозволить йому утримувати тиск більше, ніж визначений за виразом (10).

Тому матеріал зовнішніх шарів циліндра використовується неефективно. Розвантажити внутрішні шари можна за рахунок більш інтенсивного навантаження зовнішніх шарів. Для цього циліндр потрібно виконати складовим, надівши один циліндр на інший з натягом. У таких циліндрах величина граничного внутрішнього тиску може бути значно більше, ніж в цілісному циліндрі. При посадці одного циліндра на інший з натягом окружні напруження у внутрішньому циліндрі стають стискаючими, а в зовнішньому – розтягуючими (рис. 6).



Рис. 5. Результати експериментальних досліджень по пробиттю перешкоди у вигляді пустотілих циліндрів

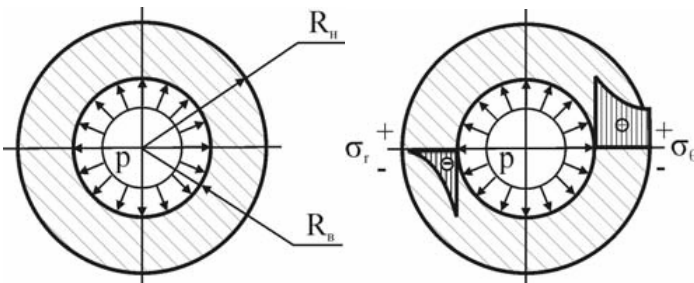


Рис. 6. Скріплені циліндри

Для визначення глибини проникання ударника в циліндр використаємо рішення задачі Гадоліна [11].

При навантаженні складеного циліндра внутрішнім тиском обидві його частини будуть працювати як одне ціле і в складеному циліндрі виникнуть напруження, які повинні бути алгебраїчно підсумовані з попередніми напруженнями натягу. У внутрішніх, найбільш напружених точках робочі напруження і напруження натягу мають різні знаки. Таким чином, сумарне напруження знижується і складовий циліндр здатний витримати більший тиск. Однак внаслідок натягу збільшуються напруження в зоні контакту у зовнішнього циліндра. Тому натяг δ повинен підбиратися для заданого робочого тиску p так, щоб була забезпечена міцність не тільки внутрішнього, а й зовнішнього циліндра.

Після посадки одного циліндра на інший зовнішній радіус внутрішнього циліндра і внутрішній радіус зовнішнього стають однаковими, а сума абсолютних величин радіальних переміщень обох циліндрів по радіусу поверхні контакту під дією контактної тиску дорівнює половині натягу.

Контактний тиск буде зовнішнім для внутрішнього циліндра і внутрішнім для зовнішнього циліндра.

У відповідності з третьою теорією міцності еквівалентні напруження у складовому циліндрі визначаються наступним чином [11]:

$$\sigma_{\text{ЕКВ}} = p \cdot \frac{2 \cdot r_{\text{H}_2}^2}{r_{\text{H}_2}^2 - r_{\text{H}_1}^2} \left[1 - \frac{1}{\frac{r_{\text{H}_2}^2}{r_{\text{H}_2}^2 - r_{\text{H}_1}^2} + \frac{r_{\text{H}_1}^2}{r_{\text{H}_1}^2 - r_{\text{B}_1}^2}} \right], \quad (15)$$

де $r_{\text{B}_1}^2$ - внутрішній радіус внутрішнього циліндра, $r_{\text{H}_1}^2$ - зовнішній радіус внутрішнього циліндра, $r_{\text{H}_2}^2$ - зовнішній радіус зовнішнього циліндра.

Умовам Гадоліна відповідають наступні значення натягу та контактної тиску [11]:

$$\delta = \frac{2 \cdot p \cdot r_{\text{H}_1}}{E}. \quad (16)$$

$$p_{\text{К}} = \frac{\delta \cdot E}{4 \cdot r_{\text{H}_1}^3} \frac{(r_{\text{H}_1}^2 - r_{\text{B}_1}^2) \cdot (r_{\text{H}_2}^2 - r_{\text{H}_1}^2)}{r_{\text{H}_2}^2 - r_{\text{B}_1}^2}. \quad (17)$$

За допомогою залежностей (12), (14)-(17) проведемо розрахунок шляху інпроникнення сталюї кулі $D=0,00545$ м, що рухається зі швидкістю $V=600$ м/с; $L=0,02$ м; у сталевий складений циліндр з параметрами $r_{\text{B}_1} = 0,0025$ м, $r_{\text{H}_1} = 0,0035$ м, $r_{\text{H}_2} = 0,005$ м, $\delta = 0,0005$ м, $f=0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^5$ МПа (рис. 7).

Вважаємо, що повна енергія, поглинена складеним циліндром в процесі його деформації при

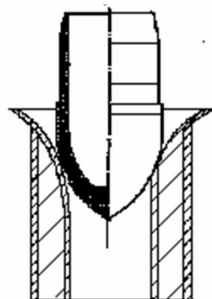


Рис. 7. Схема взаємодії кулі із складеним циліндром

розширенні отвору $E_{\Sigma} = 2700$ Дж.

При цих вихідних даних, отримаємо: $h = 0,06$ м.

При цьому, умова (10) виконується (напруження

$$\sigma_{\theta} = 0,85 \cdot 10^4 \text{ МПа} \leq [\sigma]).$$

Висновки

1. Досліджено процес взаємодії високошвидкісного ударника (кулі) із захисними перешкодами традиційного типу та у вигляді набору пустотілих циліндрів (одиначного та скріпленого).

2. Запропонована модель визначення глибини проникання високошвидкісного ударника (кулі) в пустотілі циліндри (одиначний та скріплений).

3. Проведені розрахунки глибини проникання кулі зі сталевим сердечником із автомата Калашникова (АК-74) в сталеву пластину та в сталеві циліндри (одиначний та скріплений). Результати розрахунків перевірені за допомогою натурних експериментів.

4. Подальше вдосконалення засобів індивідуального бронезахисту може бути досягнуто шляхом застосування оптимального поєднання нових матеріалів і сучасних конструктивно-схемних рішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Попов Н.Н.* Расчет конструкций на динамические и специальные нагрузки. / Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев, А.В. Забегаяев – М.: Высшая школа, 1992. – 320 с.
2. *Калашников В.В.* Исследование влияния конструкции пули на процесс пробивания стальной преграды / В.В. Калашников, С.Е. Алексенцева // *Машиностроение. Вестник Самарского Государственного Технического Университета. СЕР. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ* -2009.-№2(24). – с.60–68.
3. *Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие.* /Под общей ред. Панасюка В.В. – К.: Наукова думка, 1988. –435 с.
4. *Аптуков В.Н.* Проникание: механические аспекты и математическое моделирование / В.Н. Аптуков // *Проблемы прочности.* –1990. – N 2. – С.60–68.
5. *Астанин В.В.* Особенности деформирования и разрушения преград при взаимодействии по нормали со стальным ударником / Астанин В.В., Галиев Ш.У., Иващенко К.Б.// *Проблемы прочности.* –1988.–№12. –С.52–57.
6. *Харченко В.В.* Модели процессов высокоскоростного деформирования материалов с учетом вязкопластических эффектов / В.В. Харченко.– Киев:НАНУ, ИПП, 1999.–280 с.
7. Патент № 20386. Украина, МКИ F 41Н1/02 Противопульная защитная одежда: /В.Ф. Греков, А.В. Ковтун, С.И. Нестеренко, В.А. Неделько; заявитель и патентообладатель Ковтун А.В.–N 93101170/21; Заявлено 15.07.97; Опубл.27.02.98 Бюл. № 1. – 6 с.
8. *Сопrotивление материалов* / Под ред. Г. С. Писаренко – Изд. 5-е. – Київ:Вишшашк., 1986. – 775 с.
9. *Тимошенко С.П.* Сопrotивление материалов: В 2 т. – Изд. 2-е. – М.:Наука, 1965. – Т: 1. Элементарная теория и задачи. – 364 с.
10. *Феодосьев В. И.* Сопrotивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 591 с.
11. *Практические расчеты на прочность конструктивных элементов. Ч. I.* / А. Г. Дибир, О. В. Макаров, Н. И. Пекельный, Г. И. Юдин, М. Н. Гребенников. – Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм.ун-т «Харьковский авиац. институт», 2007. – 102 с.

REFERENCES

1. *Popov N.N.* Raschet konstruktсий na dinamicheskiye I spetsial'nyye nagruzki (Calculation of structures for dynamic and special loads) / N.N. Popov, B.S. Rastorguyev, A.V. Zabegayev – M.: Vysshayashkola, 1992. – 320 s.
2. *Kalashnikov V.V.* Issledovaniye vliyaniya konstruktсий puli na protsess probivaniya stal'noy pregrady (Study of the influence of the bullet design on the process of punching steel barriers) /

- V.V. Kalashnikov, S.Ye. Aleksentseva // Mashinostroyeniye. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. SER. TEKHNIЧЕСKIYE NAUKI -2009. - №2(24). – s.60–68.
3. Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov (Fracture mechanics and strength of materials). Spravochnoye posobiye. /Pod obshchey red. Panasyuka V.V. – K.: Naukova dumka, 1988. –435 s.
 4. Aptukov V.N. Pronikaniye: mekhanicheskiye aspekty i matematicheskoye modelirovaniye (Penetration: mechanical aspects and mathematical modeling) / V.N. Aptukov // Problemy prochnosti. –1990.- N 2. – s.60–68.
 5. Astanin V.V. Osobennosti deformirovaniya i razrusheniya pregrad pri vzaimodeystvii po normali so stal'nym udarnikom (Features of deformation and destruction of barriers in the interaction along the normal with a steel drummer) / Astanin V.V., GaliyevSH.U.,Ivashchenko K.B.// Problemyprochnosti. – 1988. – №12. – s.52–57.
 6. Kharchenko V.V. Modeli protsessov vysokoskorostnogo deformirovaniya materialov s uchetoм vyazkoplachesticheskikh effektov (Models of processes of high-speed deformation of materials taking into account viscoplastic effects) / V.V. Kharchenko. – Kiyev: NANU, IPP, 1999. –280 s.
 7. Patent № 20386. Ukraina, MKI F 41H1/02 Protivopul'naya zashchitnaya odezhda: (Bulletproof protective clothing:) /V.F. Grekov, A.V. Kovtun, S.I. Nesterenko, V.A. Nedel'ko; zayavitel' ipatentoobladatel' Kovtun A.V.-N 93101170/21; Zayavleno 15.07.97; Opubl.27.02.98 Byul. № 1– 6 s.
 8. Soprotivleniye materialov (Strength of Materials) / Pod red. G.S. Pisarenko – Izd. 5-ye. – Kiyv: Vishchashk., 1986. – 775 s.
 9. Timoshenko S.P. Soprotivleniye materialov (Strength of Materials) V 2 t. – Izd. 2-ye. – M.: Nauka, 1965. – T. 1. Elementarnaya teoriya i zadachi. – 364 s.
 10. Feodos'yev V.I. Soprotivleniye materialov (Strength of Materials) – M.: Izd-vo MGTU, 2000. – 591 s.
 11. Prakticheskiye raschety na prochnost' konstruktivnykh elementov (Practical calculations of the strength of structural elements). CH. I. / A.G. Dibir, O.V. Makarov, N.I. Pekel'nyy, G.I. Yudin, M.N. Grebennikov. – Ucheb. posobiye. – Khar'kov: Nats. aerokosm.un-t «Khar'kovskiy aviats. institut», 2007. – 102 s.

Стаття надійшла 11.04.2019

Kovtun A., Tabunenko V., Nesterenko S.

MODELS OF ENGAGEMENT BETWEEN A HIGH-SPEED FIRING PIN AND PROTECTIVE OBSTACLES

The article is devoted to the process of engagement of a high-speed firing pin and protective obstacles of both – traditional and new types. It analyzes the mechanism of punching the protective obstacles. The article presents the formulas of determining the depth of penetration of a firing pin into a protective obstacle of the traditional type. It proposes the models of determining the depth of penetration of a firing pin into an obstacle in the form of a set of empty cylinders. The article highlights the results of calculations and their comparing with the results of experiments. The author determines the further researches to be related to the violation of the structural integrity of the bullet with a steel core and a lead shell, the possibility of which must be taken into account while designing protective structures.

The scientific basis of the research of the process of breaking the obstacles by high-speed firing pins is based on the theory of elasticity, plasticity and strength of materials, the theoretical basis of ensuring the survivability of personnel in the process of carrying out combat operations, the theory of reliability of weapons, mathematical modeling, mathematical planning of experiments.

The aim of the article is to investigate the process of engagement between a high-speed firing pin and a protective obstacle of the traditional type and an obstacle in the form of a set of empty cylinders.

In the process of writing the article there was used the theory of the elastically deformed state of thick-walled membranes, the theory of the strength of thick-walled membranes and the method of Gadolin. The author has come to the following conclusions:

1. The article analyzed the process of engagement between high-speed firing pin (bullet) and protective obstacles of the traditional type and in the form of a set of empty cylinders (single and combined).
2. The article proposed the model for determining the depth of penetration of a high-speed firing pin (bullet) into empty cylinders (single and combined).

3. The article highlighted the results of calculations of the depth of penetration of a bullet with a steel core from a Kalashnikov (AK-74) gun-machine into a steel plate and steel cylinders (single and combined). The results of the calculations were verified using practical experiments.

4. The article set out that the further researches would be related to the violation of the structural integrity of the bullet with a steel core and a lead shell, the possibility of which would be taken into account in the process of designing protective structures.

Keywords: model, armor protection, high-speed firing pin, protective obstacle, deformation, empty cylinder.

Ковтун А.В., Табуненко В.О., Нестеренко С.І.

МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ВИСОКОШВИДКІСНОГО УДАРНИКА З ЗАХИСНИМИ ПЕРЕШКОДАМИ

Розглянуто процес взаємодії високошвидкісного ударника з захисними перешкодами традиційного та нового типів. Досліджено механізм пробивання захисних перешкод. Наведені формули для визначення глибини проникнення ударника в захисну перешкоду традиційного типу. Запропоновані моделі визначення глибини проникнення ударника в перешкоду у вигляді набору пустотілих циліндрів. Наведені результати розрахунків та порівняння їх з результатами експериментів. Подальші дослідження пов'язані з врахуванням порушення конструктивної цілісності кулі зі сталевим сердечником і свинцевої оболонки, можливість якої необхідно враховувати при проектуванні захисних конструкцій.

Науковою основою досліджень процесу пробивання перешкод високошвидкісними ударниками є: теорія пружності, пластичності і міцності матеріалів, теоретичні основи забезпечення живучості особового складу підрозділів при веденні бойових дій, теорія надійності зразків озброєння, математичне моделювання, математичне планування експериментів.

Метою статті було дослідити процес взаємодії високошвидкісного ударника із захисною перешкодою традиційного типу та перешкодою у вигляді набору пустотілих циліндрів.

При написанні статті було використано теорія пружно-деформованого стану товстостінних оболонок, теорія міцності товстостінних оболонок, метод Гадоліна.

Зроблено висновки:

1. Досліджено процес взаємодії високошвидкісного ударника (кулі) із захисними перешкодами традиційного типу та у вигляді набору пустотілих циліндрів (одиначного та скріпленого).

2. Запропонована модель визначення глибини проникання високошвидкісного ударника (кулі) в пустотілі циліндри (одиначний та скріплений).

3. Проведені розрахунки глибини проникання кулі зі сталевим сердечником із автомата Калашникова (AK-74) в сталеву пластину та в сталеві циліндри (одиначний та скріплений). Результати розрахунків перевірені за допомогою натурних експериментів.

4. Подальші дослідження пов'язані з врахуванням порушення конструктивної цілісності кулі зі сталевим сердечником і свинцевої оболонки, можливість якої необхідно враховувати при проектуванні захисних конструкцій.

Ключові слова: модель, броньовий захист, високошвидкісний ударник, захисна перешкода, деформація, пустотілий циліндр.

Ковтун А.В., Табуненко В.А., Нестеренко С.И.

МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УДАРНИКА С ЗАЩИТНЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

В данной работе рассмотрен процесс взаимодействия высокоскоростного ударника с защитными препятствиями традиционного и нового типов. Исследован механизм пробивки защитных препятствий. Приведены формулы для определения глубины проникновения ударника в защитную преграду традиционного типа. Предложенные модели определения глубины проникновения ударника в препятствие в виде набора пустотелых цилиндров. Приведенные результаты расчетов и сравнения их с результатами экспериментов. При написании статьи были использованы теория напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек, теория прочности толстостенных оболочек, метод Гадолина. Дальнейшие исследования связаны с учетом нарушения конструктивной целостности пули со стальным сердечником и свинцовой оболочки, возможность которой необходимо учитывать при проектировании ограждающих конструкций.

Ключевые слова: модель, броневая защита, высокоскоростной ударник, защитное препятствие, деформация, пустотелый цилиндр.

УДК 531.66

Ковтун А.В., Табуненко В.О., Нестеренко С.І. Моделі взаємодії високошвидкісного ударника з захисними перешкодами / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 207-219.

Іл. 7. Бібліогр. 11 назв.

UDC 531.66

Kovtun A., Tabunenko V., Nesterenko S. Models of engagement between a high-speed firing pin and protective obstacles / Strength of Materials and the Theory of Structures. – 2019. – Issue 102. – P. 207-219.

Fig. 7. Ref. 11 items.

УДК 531.66

Ковтун А.В., Табуненко В.А., Нестеренко С.І. Модели взаимодействия высокоскоростного ударника с защитными препятствиями/ Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 102. – С. 207-219.

Іл. 7. Библиогр. 11 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри бойового та логістичного забезпечення Національної академії Національної гвардії України КОВТУН Анатолій Васильович.

Адреса робоча: 61001 Україна, м. Харків, майдан захисників України 3, НАНГУ, кафедра бойового та логістичного забезпечення, Ковтун Анатолій Васильович.

Мобільний тел.: +38(097) 708-04-41;

E-mail: kav-60@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-8427-1005>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник наукового центру Національної академії Національної гвардії України ТАБУНЕНКО Володимир Олександрович.

Адреса робоча: 61001 Україна, м. Харків, майдан захисників України 3, НАНГУ, старший науковий співробітник наукового центру Національної академії Національної гвардії України, Табуненко Володимир Олександрович.

Мобільний тел.: +38(097) 225-62-60;

E-mail: tabunenko55@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1347-5390>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», НЕСТЕРЕНКО Сергій Іванович.

Адреса робоча: 61070 Україна, м. Харків, вул. Чкалова, 17, НАУ «ХАІ», доцент кафедри автомобілів та транспортної інфраструктури Національного аерокосмічного університету ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», НЕСТЕРЕНКО Сергій Іванович.

Мобільний тел.: +38(096) 965-59-33;

E-mail: nesterenko.geo@gmail.com

УДК 539.3

ОБЧИСЛЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Ю.В. Ворона,

канд. техн. наук, старший науковий співробітник

І.Д. Кара,

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.220-231

Метод граничних елементів використовується для дослідження зв'язаних термопружних тривимірних гармонічних коливань масивних тіл. Для обчислення сингулярних інтегралів запропоновані два підходи. Перший підхід базується на розвиненні ядер інтегральних рівнянь в степеневий ряд, тоді як другий підхід пов'язаний з аналітичним обчисленням інтегралів по плоскому колу з центром в полюсі.

Ключові слова: зв'язана термопружність, граничні інтегральні рівняння, фундаментальний розв'язок, сингулярність, степеневий ряд.

Вступ. Поєднання інтенсивних силових і температурних навантажень на пружні елементи досить часто зустрічається при експлуатації будівельних і машинобудівних конструкцій. У тих випадках, коли проміжок часу, впродовж якого відбувається нагрів чи охолодження, є сувимірним із періодом власних коливань за першою формою, виникає суттєва взаємодія температурних і силових полів, що зумовлює необхідність розв'язувати зв'язану задачу термопружності. Дослідження зв'язаних хвильових процесів у термопружних тілах наразі становить значний інтерес для інженерної практики. Задачі про термопружні коливання масивних тіл загального вигляду можуть бути розв'язані, за рідкими виключеннями, тільки чисельно. Серед чисельних методів, які застосовуються для таких задач, чильне місце займає потужний і універсальний метод скінченних елементів, різні аспекти використання якого для дослідження зв'язних і незв'язних термопружних коливань висвітлюється в роботах [1-5]. В багатьох випадках для розв'язання задач про коливання термопружних тіл успішно може бути застосований метод граничних елементів (МГЕ). Більшість робіт в цьому напрямку мають справу із розв'язанням незв'язаної задачі [6-8], але також існує значна кількість статей, в яких розглядаються зв'язані термопружні коливання. В деяких з таких робіт температурне навантаження розглядається як розподілене по об'єму, а обчислення об'ємних інтегралів здійснюється за відомими процедурами двоїстого взаємного методу граничних елементів, відомого як DRBEM [9-10], або близького до нього RIBEM [11]. Такі процедури, з одного боку, значно спрощують математичні вирази, а з іншого, вносять додаткові похибки апроксимації. Разом з тим існують роботи, в яких для розв'язання за МГЕ використовуються фундаментальні розв'язки зв'язаної задачі [12-15]. Варто підкреслити, що вирази таких фундаментальних розв'язків, отримані в [16] для тривимірної задачі і в [17]

для двовимірної, містять в знаменнику відстань між джерелом і точкою спостереження у високому ступені. Ця обставина значно ускладнює обчислення відповідних сингулярних інтегралів. Далі в представленій статті розробляються підходи для подолання вказаної перешкоди.

1. Основні співвідношення. Система граничних інтегральних рівнянь, які відповідають задачі тривимірних гармонічних зв'язаних термопружних коливань [18] має вигляд:

$$\frac{1}{2}u_k(P) + \int_{\Gamma} u_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma = \\ = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[\int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{4k}(P,Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{4k}(P,Q) d\Gamma \right], \quad j,k=1,2,3, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\theta(P) + \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{44}(P,Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(P,Q) d\Gamma = \\ = \frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[\int_{\Gamma} u_j(Q)T_{j4}(P,Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma \right], \quad (2)$$

де u_k – амплітудне значення компоненти вектора переміщень; ω – колова частота; θ – амплітуда температури; $\gamma=3K\alpha_t$, α_t – коефіцієнт теплового розширення, K – модуль об'ємного стиснення $\left(K=\frac{3\lambda+2\mu}{3}\right)$, κ – коефіцієнт

температуропровідності, $\eta=\frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$, T_0 – температура в ненапруженому стані,

λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; Γ – границя тіла.

Матриця фундаментальних розв'язків системи рівнянь (1), (2) може бути подана у вигляді сукупності чотирьох частин, які записуються наступним чином.

– Переміщення точок пружного простору в напрямі осі x_k від дії одиничної зосередженої сили, прикладеної до каркасу і спрямованої вздовж осі x_j :

$$U_{kj}(r,\omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left[\delta_{kj} U_0(r,\omega,m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r,\omega,m) \right], \quad (3)$$

$$U_0(r,\omega,m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [i\lambda_m(\omega)r - 1], \quad (4)$$

$$U_2(r,\omega,m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2], \quad (5)$$

де r – відстань між точкою Q , в якій визначається переміщення, та точкою P , до якої прикладена зосереджена сила,

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2},$$

$$k_1^2(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}, \quad \lambda_3^2(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa} + \frac{i\omega \eta \gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa},$$

λ і μ – константи Ламе, ρ – густина матеріалу.

– Температура точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_j :

$$U_{4j}(r, \omega) = \frac{i\omega \eta}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)]. \quad (6)$$

– Переміщення від дії зосередженого теплового джерела, інтенсивність якого W дорівнює за величиною коефіцієнту теплопровідності λ_0 , так що величина W/λ_0 дорівнює одиниці:

$$U_{k4}(r, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]. \quad (7)$$

– Розподіл в просторі температури, яка спричинена дією вищезгаданого зосередженого теплового джерела:

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cdot r} \left[(\lambda_2^2 - k_1^2) e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2) e^{i\lambda_1(\omega)r} \right]. \quad (8)$$

Користуючись формулою для напружень на площинці з компонентами нормалі n_j :

$$\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda u_{m,m} - \gamma \theta) + \mu (u_{k,j} + u_{j,k}),$$

отримуємо:

– напруження на площинці з нормаллю n_j від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_k

$$T_{jk}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right] r U_0(r, \lambda_3) + \sum_{m=1}^3 (\lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i\omega \eta \beta_m) n_j r_{,k} r U_0(r, \lambda_m) - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) + \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\}, \quad k, j=1, 2, 3, \quad (9)$$

$$T_3(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^4} \left[-i\lambda_m^3 r^3 + 6\lambda_m^2 r^2 + 15i\lambda_m r - 15 \right]; \quad (10)$$

– напруження, що виникають внаслідок дії зосередженого теплового джерела

$$T_{j4}(r, \omega) = \frac{\gamma \mu}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ n_j [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)] + r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} [U_2(r, \omega, 1) - U_2(r, \omega, 2)] \right\}, \quad (12)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^3} \left(\frac{\rho \omega^2}{2\mu} r^2 - \lambda_m^2 r^2 - i\lambda_m r + 1 \right); \quad (13)$$

– тепловий потік, спричинений дією зосередженого джерела:

$$\frac{\partial U_{44}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} r \frac{\partial r}{\partial n} \left[(\lambda_2^2 - k_1^2) U_0(r, \omega, 2) - (\lambda_2^2 - k_1^2) U_0(r, \omega, 1) \right]. \quad (14)$$

2. Подання компонент ядер відрізком степеневого ряду. Стандартний алгоритм методу граничних елементів базується на заміні поверхні розрахункової області Γ сукупністю N елементів Δ_n із заданою геометрією, достатньо малих для того, щоб в межах кожного з них вважати шукані функції такими, що змінюються за наперед заданим законом.

При $Q \notin \Delta_n$ інтеграли, які входять до системи рівнянь (1), (2) є регулярними і можуть бути обчислені за кубатурними формулами. Водночас, оскільки компоненти U_0 , U_2 , T_0 , T_3 містять у знаменниках величини r^3 та r^4 , то безпосереднє чисельне інтегрування виразів (4), (5), (10), (13) та виразу

$$\frac{U_2}{r}(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} \left[3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2 \right] \quad (15)$$

по граничним елементам, де розташований полюс, є неможливим. Щоб подолати цю перешкоду, використаємо розвинення даних величин в ряд Маклорена. В результаті отримуємо:

$$U_0(r, \omega, m) = -\frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot r^{(n-2)}}{(n+1)!}, \quad (16)$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{3}{r^3} + \frac{\lambda_m^2(\omega)}{2r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+3)} \frac{n \cdot r^n}{(n+1)!(n+3)}, \quad (17)$$

$$T_3(r, \omega, m) = -\frac{15}{r^4} - 1,5 \frac{\lambda_m^2(\omega)}{r^2} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega)r)^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)!(n+3)}, \quad (18)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m)^{n+1} r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + 0,5\lambda_3^2 \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m)^n \cdot \frac{r^{n-1}}{n!} \right]. \quad (19)$$

Розвинення (16)-(18) очікувано містять у знаменниках величини r^3 та r^4 , але оскільки кожне з них множиться на відповідне $\alpha_m(\omega)$, $m=1,2,3$, і всі три добутки складаються, причому $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, то в результаті будемо мати

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot (n-2) \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (21)$$

$$U_{kj}(r, \omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!} \left[\delta_{kj} + (n-2)r_{,j} r_{,k} \right]. \quad (22)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{(n-4) \cdot (n-2) \cdot n \cdot r^{n-3}}{(n+1)!}. \quad (23)$$

Вирази (20)-(22) містять у знаменниках величини r у ступені, не вищому за перший, а вираз (23) – у ступені, не вищому за другий, тобто сингулярність цих виразів співпадає із особливостями відповідних ядер задачі статки, і отже, їх інтегрування не становить труднощів.

В свою чергу, хоча розвинення компоненти T_0 містить у знаменнику величину r^3 , але у вираз (12) входить не просто T_0 , а різниця $T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)$, розвинення якої має вигляд

$$T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1) = \sum_{n=1}^N \left[(i\lambda_1(\omega))^{n+1} - (i\lambda_2(\omega))^{n+1} \right] r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + 0.5(\lambda_3(\omega))^2 \sum_{n=1}^N \left[(i\lambda_1(\omega))^n - (i\lambda_2(\omega))^n \right] r^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{24}$$

Результати обчислень безрозмірних величин $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$,

$$\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m), \quad \mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m), \quad r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$$

за формулами (4), (5), (10), (13) та за допомогою наближених формул (20), (21), (23), (24) при різній кількості членів ряду і різних значеннях безрозмірного параметра частоти $\frac{\omega r}{C_2}$, де $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, наведені в таблицях

1-4. В процесі обчислень використовувались такі значення фізико-механічних характеристик: $\alpha_r = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\lambda = \mu = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\kappa = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $r = 0.5 \text{ м}$, $\lambda_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 7800 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Таблиця 1

Результати обчислень величини $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$ за формулами (4) та (20)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(4)	(20) M=4	(20) M=8	(20) M=12	(4)	(20) M=4	(20) M=8	(20) M=12
0.4	0.053	0.053	0.053	0.053	0.0086	0.0086	0.0086	0.0086
1.2	0.047	0.047	0.047	0.047	0.025	0.026	0.025	0.025
2	0.037	0.036	0.037	0.037	0.038	0.043	0.038	0.038
2.8	0.023	0.019	0.023	0.023	0.048	0.06	0.048	0.048
3.6	0.0063	-0.004	0.0063	0.0063	0.052	0.078	0.052	0.052
4	-0.002	-0.018	-0.002	-0.002	0.0519	0.0862	0.0523	0.0519
4.4	-0.01	-0.032	-0.011	-0.011	0.051	0.095	0.051	0.051
5.2	-0.025	-0.067	-0.026	-0.025	0.044	0.112	0.047	0.044
6	-0.037	-0.106	-0.04	-0.037	0.033	0.129	0.04	0.033
6.8	-0.045	-0.152	-0.051	-0.045	0.019	0.147	0.035	0.019
7.6	-0.048	-0.203	-0.063	-0.048	0.0037	0.164	0.038	0.0045
8	-0.047	-0.231	-0.07	-0.048	-0.004	0.172	0.044	-0.0028

Таблиця 2

Результати обчислень величини $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega)U_2(r, \omega, m)$ за формулами (5) та (21)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(5)	(21) M=4	(21) M=8	(21) M=12	(5)	(21) M=4	(21) M=8	(21) M=12
0.4	-0.054	-0.054	-0.054	-0.054	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$
1.2	-0.06	-0.06	-0.06	-0.06	-0.0021	-0.0022	-0.0021	-0.0021
2	-0.068	-0.071	-0.068	-0.068	-0.0092	-0.0096	-0.0092	-0.0092
2.8	-0.077	-0.088	-0.077	-0.077	-0.024	-0.027	-0.024	-0.024
3.6	-0.082	-0.111	-0.082	-0.082	-0.045	-0.058	-0.045	-0.045
4	-0.081	-0.125	-0.082	-0.081	-0.058	-0.08	-0.059	-0.058
4.4	-0.079	-0.14	-0.08	-0.079	-0.073	-0.106	-0.073	-0.073
5.2	-0.064	-0.174	-0.07	-0.064	-0.102	-0.175	-0.104	-0.102
6	-0.038	-0.213	-0.05	-0.038	-0.128	-0.269	-0.134	-0.128
6.8	$6.6 \cdot 10^{-4}$	-0.259	-0.04	$7.3 \cdot 10^{-4}$	-0.147	-0.391	-0.164	-0.147
7.6	0.047	-0.31	-0.054	0.045	-0.151	-0.547	-0.197	-0.152
8	0.072	-0.338	-0.078	0.068	-0.148	-0.637	-0.22	-0.149

Таблиця 3

Результати обчислень величини $4\mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega)T_3(r, \omega, m)$ за формулами (10) та (23)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(10)	(23) M=4	(23) M=8	(23) M=12	(10)	(23) M=4	(23) M=8	(23) M=12
0.4	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$
1.2	-0.335	-0.334	-0.335	-0.335	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$
2	-0.362	-0.357	-0.362	-0.362	-0.003	$1.2 \cdot 10^{-11}$	-0.003	-0.003
2.8	-0.41	-0.39	-0.41	-0.41	-0.014	$1.7 \cdot 10^{-11}$	-0.014	-0.014
3.6	-0.479	-0.436	-0.476	-0.479	-0.047	$2.3 \cdot 10^{-11}$	-0.046	-0.047
4	-0.52	-0.463	-0.513	-0.52	-0.0755	$2.6 \cdot 10^{-11}$	-0.0736	-0.0755
4.4	-0.564	-0.493	-0.55	-0.564	-0.116	$2.9 \cdot 10^{-11}$	-0.111	-0.116
5.2	-0.652	-0.561	-0.601	-0.652	-0.238	$3.6 \cdot 10^{-11}$	-0.219	-0.238
6	-0.718	-0.641	-0.562	-0.715	-0.423	$1.22 \cdot 10^{-9}$	-0.356	-0.422
6.8	-0.728	-0.732	-0.321	-0.718	-0.672	$5.3 \cdot 10^{-11}$	-0.471	-0.668
7.6	-0.648	-0.834	0.299	-0.609	-0.967	$6.3 \cdot 10^{-11}$	-0.44	-0.954
8	-0.564	-0.89	0.829	-0.493	-1.121	$1.73 \cdot 10^{-9}$	-0.301	-1.096

Таблиця 4

Результати обчислень величини $r^3 [T_0(r, \omega, 1) - T_0(r, \omega, 2)]$ з використанням формул (13) та (24)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(13)	(24) M=4	(24) M=8	(24) M=12	(13)	(24) M=4	(24) M=8	(24) M=12
0.4	1.013	1.013	1.013	1.013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
1.2	1.116	1.116	1.116	1.116	0.034	0.034	0.034	0.034

2	1.296	1.297	1.296	1.296	0.154	0.154	0.154	0.154
2.8	1.507	1.507	1.507	1.507	0.405	0.405	0.404	0.404
3.6	1.686	1.726	1.686	1.686	0.807	0.815	0.807	0.807
4	1.741	1.816	1.742	1.741	1.066	1.084	1.066	1.066
4.4	1.762	1.892	1.762	1.762	1.361	1.395	1.361	1.361
5.2	1.663	2.011	1.664	1.663	2.036	2.145	2.037	2.036
6	1.328	2.128	1.333	1.328	2.777	3.068	2.778	2.777
6.8	0.715	2.362	0.732	0.715	3.501	4.186	3.505	3.501
7.6	-0.191	2.915	-0.141	-0.191	4.112	5.57	4.124	4.112
8	-0.75	3.401	-0.668	-0.75	4.341	6.405	4.363	4.341

З таблиць видно, що при збільшенні кількості членів ряду до 8-и або 12-и значення вищенаведених величин, отримані за допомогою виразів з використанням розвинення в ряд Маклорена, мають хорошу збіжність зі значеннями, отриманими за допомогою виразів (4), (5), (10), (13). Це говорить про надійність отриманих даних та можливість подальшої побудови на цій основі ефективної методики чисельного розрахунку.

3. Формули для обчислення сингулярних частин інтегралів. У випадку, коли елемент Δ_n є плоским, для обчислення сингулярних інтегралів можна отримати досить компактні вирази. Для цього введемо на площині, в якій лежить елемент Δ_n , місцеву систему координат η_1, η_2, η_3

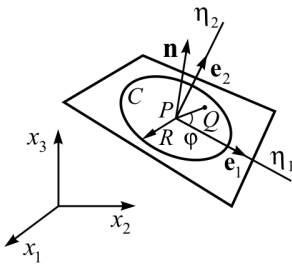


Рис. 1

з початком в точці P і позначимо через e_{1i}, e_{2i} напрямні косинуси осей η_1, η_2 відносно глобальної системи координат x_1, x_2, x_3 . При цьому напрямок осі η_3 співпадає з напрямком зовнішньої нормалі до елементу Δ_n . Положення точки Q в області Δ_n будемо характеризувати радіус-вектором r і полярним кутом φ , відлік якого здійснюється від осі η_1 (рис. 1).

Виділимо в області Δ_n круг C радіусом R і розглянемо інтеграл

$$\int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R \int_0^{2\pi} U_{jk}(P, Q) r dr d\varphi,$$

де U_{jk} задається виразом (3).

Виконавши інтегрування, отримаємо

$$\int_C \frac{e^{i\lambda_3 r}}{r} d\Gamma = \frac{2\pi}{i\lambda_3} (e^{i\lambda_3 R} - 1), \quad (25)$$

$$\int_0^R \int_\varepsilon^R \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^3} (i\lambda_m r - 1) r dr d\varphi = 2\pi \left(\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} \right),$$

завдяки чому

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C U_0(r, \omega, m) d\Gamma = 2\pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left(\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - i\lambda_m \right). \quad (26)$$

Тут використано те, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m=1}^3 \alpha_m \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} = \sum_{m=1}^3 \alpha_m i\lambda_m,$$

оскільки

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) = 0.$$

Далі, візьмемо до уваги, що

$$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_i(Q) - x_i(P)}{r} = e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi,$$

внаслідок чого

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} r_{,k} d\varphi = \pi(e_{1j}e_{1k} + e_{2j}e_{2k}) = \pi(\delta_{jk} - n_j n_k).$$

Тепер легко отримати

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m) d\Gamma = \\ & = \pi(\delta_{kj} - n_j n_k) \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left[\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Поєднуючи результати інтегрування (25)-(27), отримуємо остаточно

$$\begin{aligned} & \int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{\delta_{jk}}{2i\lambda_3 \mu} (e^{i\lambda_3 R} - 1) - \\ & - \pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left\{ \delta_{kj} \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 1) + n_j n_k \left[\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Інтегрування по області $\Delta_n - C$, тобто по решті граничного елемента, що містить полюс P , легко може бути виконане на основі кубатурних формул.

Варто відзначити, що у випадку гіпотетичного середовища, в якому відсутнє теплове розширення (коефіцієнт теплового розширення α_t дорівнює нулю), вираз (28) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = & \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \delta_{kj} \left[2ik_2 - \frac{e^{ik_2 R}}{R} (ik_2 R + 1) - \frac{e^{ik_1 R}}{R} (ik_1 R - 1) \right] + \right. \\ & \left. + n_j n_k \left[\frac{e^{ik_1 R}}{R} (ik_1 R - 3) - \frac{e^{ik_2 R}}{R} (ik_2 R - 3) + 2i(k_1 - k_2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

де

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad k_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu}}.$$

Вираз (29) з точністю до позначень співпадає з аналогічним виразом, наведеним в роботі [19] і призначеним для обчислення сингулярної частини інтегралу від фундаментального розв'язку, який відповідає задачі тривимірної еластодинаміки.

Розглянемо тепер інтеграл по кругу C від узагальненої похідної фундаментального розв'язку

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R T_{jk}(P, Q) \rho d\rho d\varphi,$$

де T_{jk} задається виразом (9). Бачимо, що будь-який доданок, з тих, що входять до складу T_{jk} , містить або множник $\frac{\partial r}{\partial n}$, або $r_{,k}$ чи $r_{,j}$ в першому ступені. Оскільки на площині, яка містить обидві точки P і Q , $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$ та

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} d\varphi = \int_0^{2\pi} (e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi) d\varphi = 0, \text{ то}$$

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = 0.$$

З такої ж причини дорівнюють нулю інтеграли по кругу від компонент фундаментального розв'язку U_{4j} (вираз (6)), U_{k4} (вираз (7)) та $\frac{\partial U_{44}}{\partial n}$, що задана виразом (14).

Для сингулярних інтегралів по кругу від компонент T_{j4} та $\frac{\partial U_{4k}}{\partial n}$ були отримані відповідно наступні вирази

$$\begin{aligned} \int_C T_{j4}(P, Q) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R T_{j4}(P, Q) r dr d\varphi = \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \times \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R [T_0(r, \omega, 1) - T_0(r, \omega, 2)] r dr = \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ \exp(i\lambda_2 R) \left[\frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \right] - \right. \\ &\left. - \exp(i\lambda_1 R) \left[\frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \right] + 0.5i\lambda_3^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} r dr d\varphi = \frac{i\omega \eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R [U_0(r, \omega, 2) - \\ &- U_0(r, \omega, 1)] r dr \frac{i\omega \eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\exp(i\lambda_2 R) - \exp(i\lambda_1 R)}{R} + i\lambda_1 - i\lambda_2 \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

4. Висновки. Представлені в статті результати представляють собою систему співвідношень для визначення сингулярних частин інтегралів, за допомогою яких ефективно обчислюються діагональні компоненти

алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь. По суті, наведені співвідношення складають головну частину чисельного алгоритму, спрямованого на розв'язання за методом граничних елементів задачі про зв'язані тривимірні гармонічні термопружні коливання масивних елементів конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Keramidas G.A., Ting E.C.* A finite element formulation for thermal stress analysis. I. Variational formulation. II. Finite element formulation. Nucl Eng Des 1976;39:267–87.
2. *Ting E.C., Chen H.C.* A unified numerical approach for thermal stress waves. Comput Struct 1982;15:165–75.
3. *Prevost J.H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problem with relaxation times. J Appl Mech Trans ASME 1983;50:817–22.
4. *Tamma K.K., Railkar S.B.* On heat displacement based hybrid transfinite element formulations for uncoupled/coupled thermally induced stress wave propagation. Comput Struct 1988;30:1025–36.
5. *Cannarozzi A.A., Ubertini F.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. Int J Solids Struct 2001;38:717–39.
6. *Sladek V., Sladek J.* Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // Appl. Math. Modelling. – 1984. - No 7. – P. 241–253.
7. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. Comput Mech. 1999;23:87–96.
8. *Park K.H., Banerjee P.K.* Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals. Int J Solids Struct 2002;39:2871–92.
9. *Kögl M., Gaul L.* A dual reciprocity boundary element method for dynamic coupled anisotropic thermoelasticity. Southampton (UK): WIT Press; 2000.
10. *Kögl M., Gaul L.* A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity. Arch Appl Mech 2003;73:377–98.
11. *Gao X.-W., Zheng B.-J., Yang K., Zhang Ch.* Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. Computers and Structures 158 (2015) 140–147.
12. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250.
13. *Dargush G.F., Banerjee P.K.* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
14. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Computational Mechanics. – 1991. V. 8. – P. 331-342.
15. *Ворона Ю.В., Кара І.Д.* Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип. 96. – К.: КНУБА, 2015. – С. 74-87.
16. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчладзе Г.В. под общей редакцией В.Д.Купрадзе.; – М.: Наука, 1976. – 664 с.*
17. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, 450 p.
18. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М: Мир, 1970. – 256 с.
19. *Ройтфарб И.З., Чу Вьет Кыонг.* Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Вип. 29. – К.: Будівельник, 1976. – С. 32-38.

REFERENCES

1. *Keramidas G.A., Ting E.C.* A finite element formulation for thermal stress analysis. I. Variational formulation. II. Finite element formulation. Nucl Eng Des 1976;39:267–87.
2. *Ting E.C., Chen H.C.* A unified numerical approach for thermal stress waves. Comput Struct 1982;15:165–75.
3. *Prevost J.H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problem with

- relaxation times. *J Appl Mech Trans ASME* 1983;50:817–22.
4. *Tamma K.K., Railkar S.B.* On heat displacement based hybrid transfinite element formulations for uncoupled/coupled thermally induced stress wave propagation. *Comput Struct* 1988;30:1025–36.
 5. *Cannarozzi A.A., Ubertini F.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. *Int J Solids Struct* 2001;38:717–39.
 6. *Sladek V., Sladek J.* Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // *Appl. Math. Modelling.* – 1984. - No 7. – P. 241–253.
 7. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. *Comput Mech.* 1999;23:87–96.
 8. *Park K.H., Banerjee P.K.* Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals. *Int J Solids Struct* 2002;39:2871–92.
 9. *Kögl M., Gaul L.* A dual reciprocity boundary element method for dynamic coupled anisotropic thermoelasticity. Southampton (UK): WIT Press; 2000.
 10. *Kögl M., Gaul L.* A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity. *Arch Appl Mech* 2003;73:377–98.
 11. *Gao X.-W., Zheng B.-J., Yang K., Zhang Ch.* Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. *Computers and Structures* 158 (2015) 140–147.
 12. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250.
 13. *Dargush G.F., Banerjee P.K.* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // *Int. J. Solid Struct.* – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
 14. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // *Computational Mechanics.* – 1991. V. 8. – P. 331-342.
 15. *Vorona Yu.V., Kara I.D.* Zastosuvannya metodu granychnykh integralnykh rivnyan dlya rozv'yazannya dynamichnykh zadach termoprzhnosti (Application of boundary integral equations method for dynamic thermoelasticity problems) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – Vyp. 96. – K.: KNUBA, 2015. – S. 74-87. (ukr)
 16. *Trehmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti (Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity) / V.D.Kupradze, T.G.Hehelia, M.O.Basheleyshvili, G.V.Burchuladze, ed. V.D.Kupradze.; M: Mir, 1976. – 664 s. (rus)*
 17. *Dominguez J.* *Boundary Elements in Dynamics.* Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, 450 p.
 18. *Nowacki W.* *Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity).* – M: Mir, 1970. – 256 s. (rus)
 19. *Roitfarb I.Z., Chu Viet Kyong.* Chislennyi metod resheniya prostranstvennykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti na osnove metoda potentsiala (Numerical technique for solving spatial elastodynamic problems with the help of the potential method) // *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy.* – Vyp. 29. – K.: Budivelnik, 1976. – S. 32-38. (rus)

Стаття надійшла до редакції 18.05.2019 р.

Vorona Yu.V., Kara I.D.

EVALUATION OF THE SINGULAR INTEGRALS OF THE THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY

The article deals with the solving of the problem of coupled thermoelastic vibrations of massive bodies. Numerical solution is sought by the boundary integral equation method. The main attention is paid to the definition of singular parts of integrals i.e. to integration along those boundary elements on which the pole is located. Two approaches are proposed for evaluation of singular integrals. The first approach is based on the expansion of integral equations kernels in a power series. For the realization of this approach, compact expressions approximating all components of the kernels are obtained. The obtained expressions has weak or strong singularities when the distance between the source point and integration point goes to zero similar to the behaviour of the corresponding elastostatic expressions. Therefore, such expressions can be successfully used for singular integrals evaluation. A number of numerical experiments have been performed, which confirms the robustness of the approach in a wide frequency range and allows us to trace the dependence between the number of retained members and the accuracy of the calculations. The second approach is related to the analytical calculation of integrals over a flat circle with a centre at the pole. In this paper the exact formulas were obtained that allow us to compute effectively the corresponding integrals over the boundary elements on which the pole is located. Among other things, the obtained exact

expressions prove the existence of corresponding singular integrals in the sense of the Cauchy principal value. As a matter of fact the above relations form the main part of a numerical algorithm aimed at solving the problem of coupled three-dimensional harmonic thermoelastic vibrations of massive elements of constructions using the of boundary element method.

Keywords: coupled thermoelasticity, boundary integral equations, fundamental solution, singularity, power series.

Ворона Ю.В., Кара І.Д.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Метод граничных элементов используется для исследования связанных термоупругих трехмерных гармонических колебаний массивных тел. Для вычисления сингулярных интегралов предложены два подхода. Первый подход базируется на разложении ядер интегральных уравнений в степенной ряд, тогда как второй подход связан с аналитическим вычислением интегралов по плоскому кругу с центром в полюсе.

Ключевые слова: связанная термоупругость, граничные интегральные уравнения, фундаментальное решение, сингулярность, степенной ряд.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара І.Д. **Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності** // Опір матеріалів та теорія споруд. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.

Дослідження зв'язаних термопружних тривимірних гармонічних коливань масивних тіл здійснюється за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Для обчислення сингулярних інтегралів розроблені два підходи.

Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. 19 назв.

UDC 539.3

Vorona Yu.V., Kara I.D. **Evaluation of the singular integrals of the three-dimensional thermoelasticity** // Strength of Materials and Theory of Structures. – K.: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 220-231.

The analysis of coupled thermoelastic three-dimensional harmonic vibrations of massive bodies is performed using the boundary integral equations method. Two approaches have been developed for the calculation of singular integrals.

Tabl. 4. Fig. 1. Ref. 19.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара І.Д. **Вычисление сингулярных интегралов трехмерной теории термоупругости** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.

Исследование связанных термоупругих трехмерных гармонических колебаний массивных тел выполняется с помощью метода граничных интегральных уравнений. Для вычисления сингулярных интегралов разработаны два подхода.

Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. 19 назв.

Автор: кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНИ Юрію Володимировичу

Робочий тел.: +38(044)245-48-29

Мобільний тел.: +38(050)750-13-61

E-mail: yuvv@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Автор: асистент кафедри будівельної механіки КАРА Ірина Дмитрівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: + 38(044) 2454829

E-mail : ikruska007@ukr.net

УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ МСЕ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПНЕВМАТИЧНИХ ШИН

Ю.Г. Козуб¹,
канд. техн. наук

І.І. Солодей²,
д-р техн. наук

¹ ДЗ Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, Старобільськ
пл. Гоголя, 1, Старобільськ, Луганська обл., 92703

² Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.232-242

В роботі розглянуто суперелементний підхід до формування розрахункових рівнянь метода скінченних елементів для шаруватих конструкцій. Запропонований шаруватий елемент дозволяє на основі тривимірної постановки отримати рішення зв'язаної задачі термопружності конструкцій з еластомірних композитів. Наведено результати чисельних досліджень надвеликогабаритних шин.

Ключові слова: багатошаровий скінченний елемент, еластомір, гумокордний композит, термопружність.

Вступ. Конструкції з композиційних матеріалів знаходять широке застосування у різних галузях промисловості. Використання конструкцій з полімерних композиційних матеріалів дозволяє знизити матеріаломісткість машин і конструкцій, скоротити терміни виробництва, підвищити корозійну стійкість виробів. Одними з широко використовуваних матеріалів є шаруваті композиційні матеріали з еластомірною матрицею, що складаються з тонких односпрямовано армованих шарів, або з почергових односпрямовано армованих та ізотропних шарів. Роботи [1-6, 8-13, 16-19, 23] присвячено дослідженню пружних характеристик шаруватих композитів, зокрема, гумокордного матеріалу та створенню математичних моделей на основі методу скінченних елементів для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із гумокордних матеріалів [7, 9, 11, 12]. Так, експериментальне дослідження пружних характеристик текстильних кордів та визначення ефективних характеристик гумокордного матеріалу за відомими залежностями представлено в роботі [1, 8]. Наведено підходи до визначення жорсткісних характеристик складних анізотропних гумокордних матеріалів, які використовуються у каркасах та брекерах [2, 3] пневматичних шин. Проте при визначенні ефективних пружних характеристик гумокордного матеріалу поздовжній та поперечний модулі пружності корду вважалися рівними, що не для всіх матеріалів виконується і відповідно, обмежує застосування наведених співвідношень. Математичну модель рівноважної конфігурації профілю пневматичної шини у вигляді інтегрального рівняння представлено в роботі [3].

Постановка задачі та її розв'язання. Кількість шарів в пакеті матеріалу може досягати двозначних величин. Зокрема, великогабаритні шини мають до 40 шарів гуми та гумокорду на боковині та ще більше на біговій частині,

якщо, враховувати шари брекери. Застосування шаруватих елементів конструкції обумовлене їх більшою ефективністю в порівнянні з однорідними деталями. За допомогою шаруватості досягається оптимальне співвідношення жорсткісних і демпфуючих характеристик багатьох елементів віброізолюючих систем. У сучасних промислових конструкціях, виготовлених з шаруватих композитних матеріалів, при експлуатаційних навантаженнях відбувається значний нагрів. При цьому істотний вплив на характер напружено-деформованого стану дає залежність фізико-механічних характеристик від температури, що приводить до суттєвих змін форми та в ряді випадків до руйнування.

В загальному випадку необхідно вирішувати зв'язану задачу термопружності.

Для скінченно-елементного розв'язання задачі термопружності для просторових шаруватих конструкцій, що мають складну геометричну форму використовуються різні підходи [4, 7, 11, 12, 14-17, 19].

Розглянемо суперелементний підхід до моделювання поведінки шаруваті конструкції за умови дії початкових напружень. У загальному випадку такий елемент може бути складений з n шарів (елементів) (рис. 1). Кожен з таких шарів має або анізотропні властивості, або ізотропні властивості слабо стисливого еластомеру. Таким чином шаруватий скінченний елемент можна представити як ансамбль скінченних елементів, матриці жорсткості яких побудовано на основі інкрементальної теорії деформування зі застосуванням моментної схеми скінченних елементів [20] у вигляді [21]

$$[K^{st} + K_0^{st}]\{u_i\} = \{P^s\},$$

де K_0^{st} – інкрементальна геометрична матриця жорсткості, що враховує дію попередніх напружень [21].

При формуванні матриці K^{st} для слабо стисливого еластомерного шару використовується моментна схема скінченних елементів з потрібною апроксимацією полів переміщень, деформацій та функції зміння об'єму [22].

При формуванні матриці жорсткості K^{st} композитного шару використовуються пружні характеристики односпрямованого гумокордного шару з урахуванням напрямку армування [18].

Компоненти тензору напружень визначаються законом термопружності Дюамеля–Неймана.

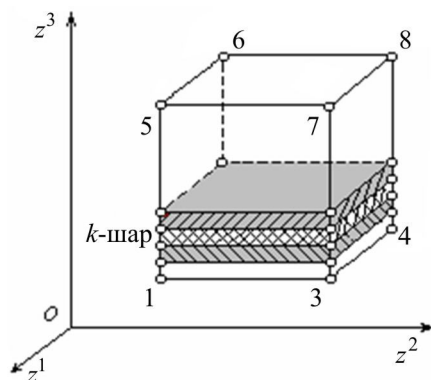


Рис. 1

При побудові системи рівнянь для суперелементної схеми необхідно перейти до глобальної нумерації вузлів m' кожного шару.

Після компонування отримуємо систему, що складається з $12(n+1)$ рівнянь (n – кількість шарів)

$$[K]\{u\} = \{R\}.$$

Для визначення переміщень пакету необхідно спочатку визначити переміщення на зовнішній поверхні, а саме вузлів $j'=1, 2, 3, 4, (4n+1), (4n+2), (4n+3), (4n+4)$.

Вектор переміщень можна виразити у вигляді

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \left\{ \mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T \right\}, \\ \mathbf{q}_1 &= \left\{ \mathbf{u}_{(1)}^T \quad \mathbf{u}_{(2)}^T \quad \mathbf{u}_{(3)}^T \quad \mathbf{u}_{(4)}^T \right\}^T, \\ \mathbf{q}_2 &= \left\{ \mathbf{u}_{(5)}^T \quad \mathbf{u}_{(6)}^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{(4n-1)}^T \quad \mathbf{u}_{(4n)}^T \right\}^T, \\ \mathbf{q}_3 &= \left\{ \mathbf{u}_{(4n+1)}^T \quad \mathbf{u}_{(4n+2)}^T \quad \mathbf{u}_{(4n+3)}^T \quad \mathbf{u}_{(4n+4)}^T \right\}^T. \end{aligned}$$

Вектор узагальнених вузлових сил можна представити у аналогічний спосіб

$$\begin{aligned} \{R\} &= \left\{ \mathbf{P}_1^T \quad \mathbf{P}_2^T \quad \mathbf{P}_3^T \right\}^T, \\ \mathbf{P}_1 &= \left\{ \mathbf{R}_{(1)}^T \quad \mathbf{R}_{(2)}^T \quad \mathbf{R}_{(3)}^T \quad \mathbf{R}_{(4)}^T \right\}^T, \\ \mathbf{P}_2 &= \left\{ \mathbf{R}_{(5)}^T \quad \mathbf{R}_{(6)}^T \quad \dots \quad \mathbf{R}_{(4n-1)}^T \quad \mathbf{R}_{(4n)}^T \right\}^T, \\ \mathbf{P}_3 &= \left\{ \mathbf{R}_{(4n+1)}^T \quad \mathbf{R}_{(4n+2)}^T \quad \mathbf{R}_{(4n+3)}^T \quad \mathbf{R}_{(4n+4)}^T \right\}^T. \end{aligned}$$

Тоді систему рівнянь можна представити у вигляді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{Bmatrix}.$$

Вектор переміщень “внутрішніх” вузлів можна виразити через переміщення “зовнішніх” вузлів

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 &= \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{P}_2 - \mathbf{K}_{22}^{-1} [\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{23}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{11} \mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \left(\mathbf{P}_2 - [\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{23}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{K}_{13} \mathbf{q}_3 &= \mathbf{P}_1, \\ \mathbf{K}_{31} \mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{32} \mathbf{K}_{22}^{-1} \left(\mathbf{P}_2 - [\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{23}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{K}_{33} \mathbf{q}_3 &= \mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

Таким чином отримуємо систему рівнянь для скінченного суперелемента

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

де $[\tilde{\mathbf{K}}] = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}\mathbf{T}_1 & \mathbf{K}_{12}\mathbf{T}_2 \\ \mathbf{K}_{32}\mathbf{T}_1 & \mathbf{K}_{32}\mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \right)_{48 \times 48}$ – матриця жорсткості

суперелемента; $\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix}$ – вектор вузлових переміщень на зовнішніх

гранях суперелемента; $\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{12}\mathbf{S} \\ \mathbf{K}_{32}\mathbf{S} \end{Bmatrix}$ – вектор вузлових сил на

зовнішніх гранях суперелемента

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{23}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{P}_2$$

Для розв'язання задачі обрахунку температури дисипативного розігріву необхідно вирішити задачу теплопровідності.

Для побудови матриці теплопровідності для шаруватого скінченного елемента використовується гіпотеза про нерозривність полів температур та теплових потоків на границях розділу шарів.

В матричному вигляді система рівнянь для шару приймає вигляд

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{T}\} + [\mathbf{H}^{(st)}]\{\mathbf{T}\} + \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{S}\} = 0,$$

де \mathbf{H} – матриця теплопровідності, $\mathbf{H}^{(st)}$ – матриця, зумовлена граничними умовами 3-го роду на поверхні шару, \mathbf{P} – вектор еквівалентного навантаження, обумовлений внутрішнім джерелом теплоутворення, \mathbf{S} – вектор еквівалентного навантаження, обумовлений тепловими потоками і температурою на поверхні шару.

Функція теплоутворення обчислюється як осереднена за цикл деформування для кожного шару.

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt.$$

Рішення зв'язаної задачі виконується зі застосуванням методу послідовних наближень.

Результати розрахунку та аналіз розв'язків. Розглядається задача про визначення термопружного стану надвеликогабаритної шини 40.00-57

При виготовленні таких шин використовується схема з діагональним армуванням по стінці шини.

Вихідним матеріалом для корду служать віскозні і поліамідні волокна, модуль пружності яких приймається рівним 1,5 ГПа. Для гумових шарів модуль пружності приймається рівним 60 МПа. Кут армування змінюється від точки до точки по меридіану, досягаючи на екваторі 45 - 65°, в залежності від типу і призначення шини типу 40.00-57 з урахуванням дисипативного розігріву. Максимальний прогин навантаженої шини при обтисненні на площину приймається рівним 0,1 м. [24]. Тиск повітря всередині шини становить 0,6 МПа. Швидкість руху складає 25 км/год. Для надвеликогабаритних шин типу 40.00-57 кут армування прийнятий рівним 53°. Каркас шини складається з 34 основних гумокордних та гумових

шарів. Брекер складається з 4 шарів. Пружні та термодинамічні характеристики армованих шарів визначаються за методом сумішей [18].

Робочий тиск 0,5-0,6 МПа, номінальне навантаження на вісь шини 53,5 МН (рис. 2).

На рис. 3-5 представлені розділення переміщень в зоні контакту з площиною опори.

Розрахунок напружено-деформованого стану та температури дисипативного розігріву якісно співпадають з даними роботи [24], де наведено експериментальні дані дослідження процесів деформування та дисипативного розігріву шини (рис. 6-9).

На рис. 10 представлено розподілення температури в осьовому перерізі шини. Максимального значення температура набуває в зоні кромки брекера.

На рис. 11-12 представлена залежність максимальної температури бігової зони шини в залежності від швидкості кочення шини для навантажень 450 кН (1), 535 кН (2) и 620 кН (3). Суцільна крива – МСЕ рішення, штрихова лінія дані [24].

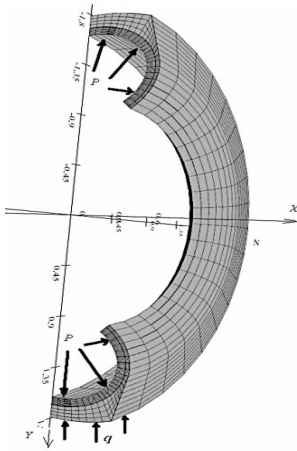


Рис. 2

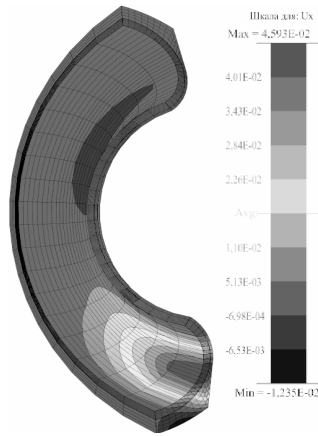


Рис. 3. Переміщення u_1

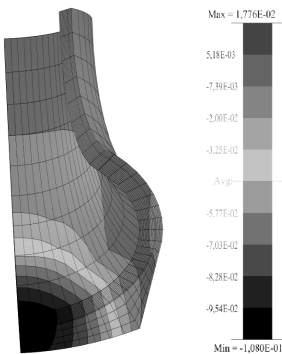


Рис. 4. Переміщення u_2

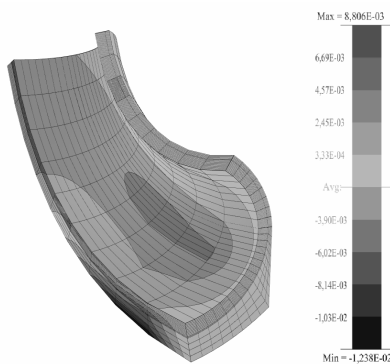


Рис. 5. Переміщення u_3

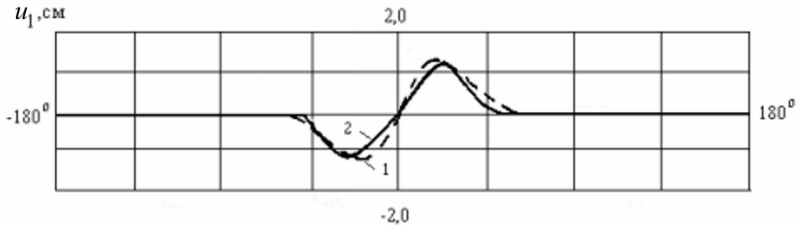


Рис. 6. Переміщення серединної поверхні каркасу в окружному напрямку по стінці:
1 – результат [24], 2 – МСЕ рішення

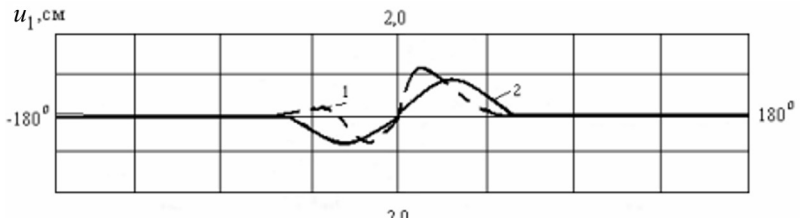


Рис. 7. Переміщення серединної поверхні каркасу в окружному напрямку по короні:
1 – результати [24], 2 – МСЕ рішення

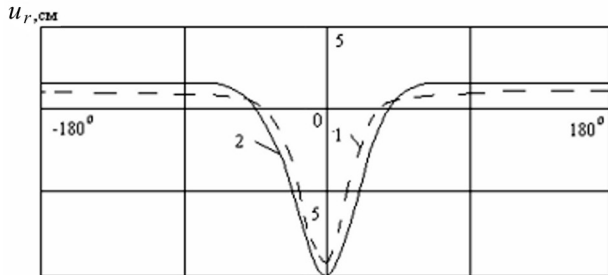


Рис. 8. Переміщення серединної поверхні каркасу у радіальному напрямку по короні:
1 – результати [24], 2 – МСЕ рішення

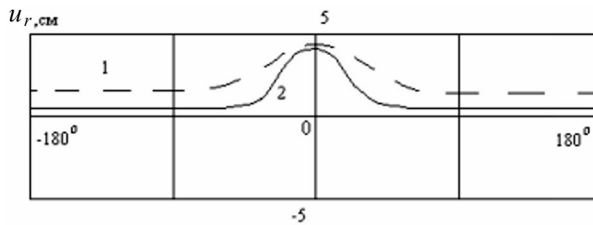


Рис. 9. Переміщення серединної поверхні каркасу у радіальному напрямку по стінці:
1 – результати [24], 2 – МСЕ рішення

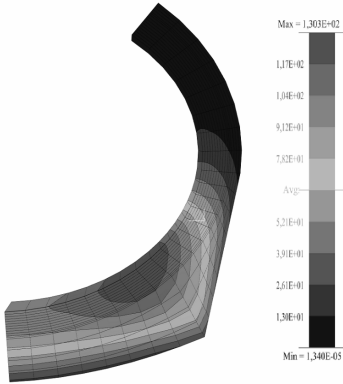


Рис. 10

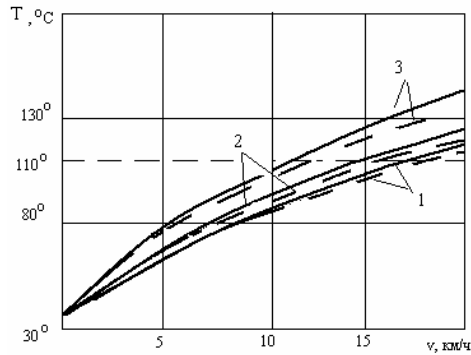


Рис. 11

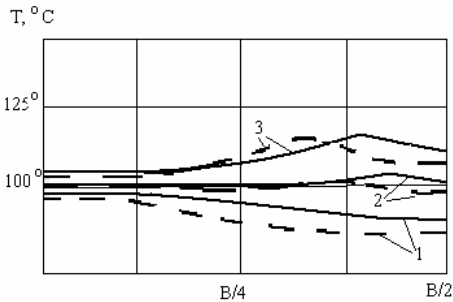


Рис. 12. Розподілення максимальних температур по ширині (B) бігової зони при швидкості 15 км/год і навантаженнях 450 кН (1), 535 кН (2) і 620 кН (3) (суцільна лінія - рішення МСЕ, штрихова – [24])

Висновки. Для моделювання властивостей багатошарової тороїдальної конструкції застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідних шарів за допомогою просторового багатошарового скінченного елемента. При формуванні вихідних рівнянь шаруватого скінченного елемента використовується суперелементний підхід, що дозволяє уникнути спрощуючих гіпотез, які зводять тривимірну постановку задачі до двовимірної.

Наведено розв'язок задачі термопружності для надвеликогабаритних шин, що дозволяє прогнозувати ресурс конструкції в умовах експлуатаційних навантажень.

Наступним етапом роботи є розв'язання задач деформування конструкцій з еластомірних композитів з урахуванням процесів старіння та руйнування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Каспаров А.А. Упругие характеристики и механика деформирования текстильных кордов / А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 69-83.
2. Растеряев Ю.К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю.К. Растеряев, Г.Н. Агальцов // Геотехническая механика. – 2005. – № 60. – С. 200-248.
3. Растеряев Ю.К. Теория деформирования составных анизотропных резинокордных материалов, используемых в каркасах пневматических шин / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 84-100.

4. *Баженов В.А., Кривенко О.П.* Застосування методик прогнозування пружних характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури / *В.А. Баженов, О.П. Кривенко* // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2017. – Вип. 98. – С. 3-15.
5. *Белкин А.Е.* Элементы автоматизированного проектирования и расчет напряженного состояния радиальных шин / *А.Е. Белкин, А.О. Беликов, Н.Л. Нарская, А.В. Уляшкин* // *Каучук и резина* – 1993. – №2. – С.11-14.
6. *Белкин А.Е.* Приближенное решение контактной задачи об обжатии шины на плоскую или цилиндрическую опорную поверхность / *А.Е. Белкин, А.В. Уляшкин* // *Изв. Вузов Машиностроение.* – 1993. – №10. – С.14-21.
7. *Белкин А.Е.* Моделирование стационарного теплового состояния радиальной шины, вызванного диссипативным разогревом / *А.Е. Белкин, Н.Л., Н.Л. Нарская* // *Вестник МГТУ им. Н.С.Баумана.* – 2000. – №2(39)– С. 19-31.
8. *Бидерман В.Л.* Вопросы расчета резиновых деталей / *В.Л. Бидерман* // *Расчеты на прочность.* – 1958. – Вып. 3. – С. 40-88.
9. *Блумберг Н.Н.* Исследование напряженного состояния упругих многослойных конструкций методом конечных элементов / *Н.Н. Блумберг* // *В кн.: Вопр. электродинамики и механики сплошных сред.* Рига. - 1976. - Вып.2. - С. 117-134.
10. *Ненахов А.Б.* Конструирование шин с использованием расчетных методов / *А.Б. Ненахов, С.Л. Соколов, Л.Р. Гальперин* // *Тр. 14-го Симп. «Проблемы шин и резинокордных композитов».* – 20-24 октября 2003. – С. 100-106.
11. *Каспаров А.А.* Расчетные исследования низкопрофильных шин специального назначения / *А.А. Каспаров, И.В. Веселов, С.Л. Соколов* // *Известия ВУЗов. Машиностроение.* – 2016. – №11 (680). – С. 34-39.
12. *Соколов С.Л.* Расчет циклической долговечности пневматических шин. / *С.Л. Соколов, А.Б. Ненахов* // *Сб. докл. 25-го Симп. «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов».* – 13-17 октября 2014. – С. 320-332.
13. *Абдрахимов Р.Р.* Многоастицевая безвоздушная шина из композита. Тепловое состояние / *Р.Р. Абдрахимов, А.В. Игнатова, С.Б. Сапожников* // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение».* – 2017. – Т. 17, № 1. – С. 5–12
14. *Бережной Д.В.* Универсальный конечный элемент для расчета комбинированных конструкций. / *Д.В. Бережной, М.К. Сагдатуллин, А.А. Саченков* // *Вестник Казанского государственного технологического университета.* – 2012. – №17. – С.150-157.
15. *Бережной Д.В.* Универсальный конечный элемент для расчета многослойных тонкостенных конструкций сложной геометрии / *Д.В. Бережной, Л.Р. Фахрутдинов, А.К. Габиева* // *Тр. Междунар. конф. "Сеточные методы".* – 24-29 сентября 2014. – С.139-147.
16. *de Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J. J., Jorge R.M.N.* A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I - geometrically linear applications // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* 2005. – V. 62, №7. – P. 952–977.
17. *Sze K.Y.* Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis // *Prog. Struct. EngngMater.* – 2002. – V. 4. – P. 400–407.
18. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МРЕЛА+». / *Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г., Гоменюк С.И., Киричевский Р.В., Гребенюк С.Н./* – К.: Наука думка, 2005. – 402с.
19. *Гондях О.В.* Уточнений скінченний елемент користувача для моделювання АВАКУС процесів розширення багатопарових конструкцій/ *О.В. Гондях* // *Наукові вісті НТУУ "КПІ". Матеріалознавство і машинобудування.* – 2012. – №2. – С. 114-122.
20. *Сахаров А.С.* Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений / *А.С. Сахаров* // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* — 1974. — № 23. — С. 47—52.
21. *Дохняк Б.М.* Расчет предварительно напряженных конструкций из эластомеров / *Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб* // *Тр. 13-го Симп. «Проблемы шин и резинокордных композитов».* – М.: НИИ шинной промышленности. - 14-18 октября 2002. - С.119-123.
22. *Киричевский В.В.* Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / *В.В. Киричевский, А.С. Сахаров.* – К.: Будивельник, 1992. – 216 с.
23. *Шешенин С.В., Чистяков П.В., Закалюкина И.М.* Применение модели вязкоупругости Максвелла для резинокордного композита / *С.В. Шешенин, П.В. Чистяков, И.М. Закалюкина* // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 9, №4 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/55TVN417.pdf>
24. *Скорняков Э.С.* Теория моделирования сверхкрупногабаритных шин / *Э.С. Скорняков* // *Днепропетровск, ДГУ.* - 1992. – 32 с.

REFERENCES

1. *Kasparov A.A.* Uprugie charakteristiki i mehanika deformirovaniya tekstilnykh kordov / *A.A. Kasparov* // *Geotekhnicheskaya mehanika*. – 1999. – # 11. – S. 69-83.
2. *Rasteryaev Yu.K.* Sostavnyie rezinokordnyie materialy i mehanika ih deformirovaniya / *Yu.K. Rasteryaev, G.N. Agaltsov* // *Geotekhnicheskaya mehanika*. – 2005. – # 60. – S. 200-248.
3. *Rasteryaev Yu.K.* Teoriya deformirovaniya sostavnykh anizotropnykh rezinokordnykh materialov, ispolzuemykh v karkasakh pnevmaticheskikh shin / *Yu.K. Rasteryaev, A.A. Kasparov* // *Geotekhnicheskaya mehanika*. – 1999. – # 11. – S. 84-100.
4. *Bazhenov V.A.* Zastosuvannya metodik prognozuvannya pruzhnykh charakteristik kompozitnogo materialu v skInchennoelementny modelli obolonki neodnorodnoyi strukturi / *V.A. Bazhenov, O.P. Krivenko* // *OprIr materIalIv I teorIya sporud*. – 2017. – Vip. 98. – S. 3-15.
5. *Belkin A.E.* Elementy avtomatizirovannogo proektirovaniya i raschet napryazhennogo sostoyaniya radialnykh shin / *A.E. Belkin, A.O. Belikov, N.L. Narskaya, A.V. Ulyashkin* // *Kauchuk i rezina* – 1993. – #2. – S.11-14.
6. *Belkin A.E.* Priblizhennoe reshenie kontaktnoy zadachi ob obzhatii shiny na ploskuyu ili tsilindricheskuyu opornuyu poverhnost / *A.E. Belkin, A.V. Ulyashkin* // *Izv. Vuzov Mashinostroenie*. – 1993. – #10. – S.14-21.
7. *Belkin A.E.* Modelirovanie statsionarnogo teplovogo sostoyaniya radialnoy shiny, vyzvannogo dissipativnyim razogrevom / *A.E. Belkin, N.L., N.L. Narskaya* // *Vestnik MGTU im. N.E. Baubana*. – 2000. – #2(39) – S. 19-31.
8. *Biderman V.L.* Voprosy rascheta rezinovykh detaley / *V.L. Biderman* // *Raschetny na prochnost*. – 1958. – Vyip. 3. – S. 40-88.
9. *Blumberg N.N.* Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya uprugikh mnogoslownykh konstruksiy metodom konechnykh elementov / *N.N. Blumberg* // *V kn.: Vopr. elektrodinamiki i mehaniki sploshnykh sred. Riga. 1976. Vyip.2. S. 117-134.*
10. *Nenahov A.B.* Konstruirovaniye shin s ispolzovaniem raschetnykh metodov / *A.B. Nenahov, S.L. Sokolov, L.R. Galperin* // *Tr. 14-go Simp. «Problemyi shin i rezinokordnykh kompozitov»*. – 20-24 oktyabrya 2003. – S. 100-106.
11. *Kasparov A.A.* Raschetnyie issledovaniya nizkoprofilnykh shin spetsialnogo naznacheniya / *A.A. Kasparov, I.V. Veselov, S.L. Sokolov* // *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie*. – 2016. – #11 (680). – S. 34-39.
12. *Sokolov S.L.* Raschet tsiklicheskoj dolgovechnosti pnevmaticheskikh shin. / *S.L. Sokolov, A.B. Nenahov* // *Sb. dokl. 25-go Simp. « Problemyi shin, RTI i elastomernykh kompozitov»*. – 13-17 oktyabrya 2014. – S. 320–332.
13. *Abdrahimov R.R.* Mnogaspitsevaya ezvozduchnaya shina iz kompozita. Teplovoe sostoyanie / *R.R. Abdrahimov, A.V. Ignatova, S.B. Sapozhnikov* // *Vestnik YuUrGU. Seriya «Mashinostroenie»*. – 2017. – T. 17, # 1. – S. 5–12
14. *Berezhnoy D.V.* Universalnyy konechnyy element dlya rascheta kombinirovannykh konstruksiy. / *D.V. Berezhnoy, M.K. Sagdatullin, A.A. Sachenkov* // *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta*. – 2012. – #17. – S.150-157.
15. *Berezhnoy D.V.* Universalnyy konechnyy element dlya rascheta mnogoslownykh tonkostennykh konstruksiy slozhnoy geometrii / *D.V. Berezhnoy, L.R. Fahrutdinov, A.K. Gabibova* // *Tr. Mezhdunar. konf. "Setochnyye metody"*. – 24-29 sentyabrya 2014. – S.139-147.
16. *De Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J. J., Jorge R.M.N.* A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I - geometrically linear applications // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 2005. – V. 62, №7. – P. 952–977.
17. *Sze K.Y.* Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis // *Prog. Struct. EngngMater*. – 2002. – V. 4. – P. 400–407.
18. *Metod konechnykh elementov v vychislitelnom komplekse «MIRELA ».* / *V.V. Kirichevskiy., B.M. Dohnyak, Yu.G. Kozub, S.I. Gomenyuk, R.V. Kirichevskiy, S.N. Grebenyuk* / – K.: Naukova dumka, 2005. – 402s.
19. *Gondlyah O.V.* Utochneniy skInchennyi element koristuvacha dlya modelyuvannyv ABAQUS protseslv rozsharuvannya bagatosharovykh konstruksiy/ *O.V. Gondlyah* // *NaukovI vIstI NTUU "KPI"*. MaterIaloznavstvo I mashinobuduvannya. – 2012. – #2. –S. 114-122.
20. *Saharov A.S.* Modifikatsiya metoda Rittsa dlya rascheta massivnykh tel na osnove polinomialnykh razlozheniy s uchetoм zhestkikh smescheniy / *A.S. Saharov* // *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*. — 1974. — # 23. — S. 47—52.
21. *Dohnyak B.M.* Raschet predvaritelno napryazhennykh konstruksiy iz elastomerov / *B.M. Dohnyak, Yu.G. Kozub* // *Tr. 13-go Simp. «Problemyi shin i rezinokordnykh kompozitov»*. – M.: NII shinnoy promyshlennosti. - 14-18 oktyabrya 2002. - S.119-123.

22. *Kirichevskiy V.V.* Nelineynyye zadachi termomehaniki konstruktivnykh iz slabozhimaemykh elastomerov / *V.V. Kirichevskiy, A.S. Saharov.* – К.: Будівельник, 1992. – 216s.
23. *Sheshenin S.V.* Primenenie modeli vyazkouprugosti Maksvella dlya rezinokordnogo kompozita / *S.V. Sheshenin, P.V. Chistyakov, I.M. Zakalyukina* // Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE» Tom 9, #4 (2017) <http://naukovedenie.ru/PDF/55TVN417.pdf>.
24. *Skornyakov E.S.* Teoriya modelirovaniya sverhkrupnogabaritnykh shin / *E.S. Skornyakov* // Dnepropetrovsk, DGU. 1992. 32s.

Стаття надійшла до редакції 18.05.2019 р.

Kozub Yu.G., Solodei I.I.

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR CALCULATING THE THERMAL STRESS STATE OF PNEUMATIC TIRES

The processes of deformation of some of the widely used layered composite materials with elastomeric matrix, consisting of thin unidirectionally reinforced layers, or from alternating unidirectionally reinforced and isotropic layers are considered. The method of solving the problems of thermoelasticity of constructions from such materials is proposed, which is based on the finite element method.

To form of resolving equalizations of finite element method for layered solid with initial tensions the super element method is considered. For every layer of finite element the stiffness matrix is built on the basis of incremental theory of deformation.

The decision of task for the package of finite elements, that modeling the package of the layered construction, is taken to the decision of the system of equalizations in relation to moving of knots to the surfaces of package.

On the second stage of decision of task moving of knots is calculated to the border of division of layers. The components of tensor of tensions are calculated for every layer taking into account the temperature of layer.

The field of temperatures determined for all package on the basis decisions of task of heat conductivity. At the construction of matrix of heat conductivity an ideal thermal contact is assumed between layers. The function of internal heat source is calculated for every layer as average energy for the complete cycle of loading. The solution of the linked problem of thermoelasticity of a layered composite is obtained by the method of successive approximations.

The offered method is applied for the decision of task about thermoelasticity deformation and dissipative warming-up of pneumatic tires. Pressure in a tire is considered as an initial load. Loading is attached to the axis of wheel creates additional deformations of tire. The process of tire roll is considered as cyclic deformation.

Solution of the linked task of thermoelasticity is offered for over a large size tire

Dependences of temperature of dissipative warming up are got on frequency of vibrations and size of loading. The got results satisfactorily comport with experimental data.

Keywords: multilayered finite element, elastomer, rubber cord compo, thermoelasticity.

Козуб Ю.Г., Солодей И.И.

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН

В работе рассмотрен суперэлементный подход к формированию разрешающих уравнений метода конечных элементов для слоистых конструкций. Предложенный слоистый элемент позволяет на основе трехмерной постановки получить решение связанной задачи термоупругости конструкций из эластомерных композитов. Приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: многослойный конечный элемент, эластомер, резинокордный композит, термоупругость.

УДК 539.3

Козуб Ю.Г., Солодей І.І. Використання МСЕ для обчислення термопружного стану автомобільних шин // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 232-242.

Розглянуто суперелементний метод формування матриці жорсткості шаруватого скінченного елемента та застосування запропонованого елемента для розв'язку задачі термопружності пневматичних шин.

Табл. 0. Іл. 12. Бібліогр. 24 назв.

Kozub Yu.G., Solodei I.I. Application of the finite element method for calculating the thermal stress state of pneumatic tires // Strength of Materials and the Theory of Structures. – 2019. – Issue 102. – P. 232-242.

The superelement method of forming of stiffness matrix of the layered finite element is considered. The offered element is applied for the solution of tasks of thermoelasticity of pneumatic tires.

Tabl. 0. Pic. 12. Bibliogr. 24 titles.

Козуб Ю.Г., Солодей І.І. Применение МКЭ для расчета термоупругого состояния пневматических шин // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2019. – Вип. 102. – С. 232-242.

Рассмотрен суперэлементный метод формирования матрицы жесткости слоистого конечного элемента и применение предложенного элемента для решения задачи термоупругости пневматических шин.

Табл. 0. Ил. 12. Библиогр. 24 назв.

Автор: кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри фізико-технічних систем та інформатики ДЗ "ЛНУ імені Тараса Шевченка" КОЗУБ Юрій Гордійович

Адреса робоча: 92703 Україна, Луганська обл., м. Старобільськ, площа Гоголя, 1.

ДЗ "Луганський національний університет імені Тараса Шевченка"

Робочий тел.: +38(073) 41-303-23

Мобільний тел.: +38(050) 602-56-25

E-mail: kosub.yg@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-3366-6031>

Автор: доктор технічних наук, старший науковий співробітник, зав. відділом НДІ будівельної механіки Солодей Іван Іванович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38(044) 241-55-55

Мобільний тел.: +38(050)357-44-90

E-mail: isolodey@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

УДК 725

ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ З НАКОПИЧУВАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ БУДІВЕЛЬ

Г.В. Гетун¹,

канд. техн. наук, професор, професор кафедри архітектурних конструкцій

Ю.П. Буценко²,

канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірності

О.І. Баліна¹,

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

І.С. Безклубенко¹,

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

А.В. Соломін²,

канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри біобезпеки і здоров'я людини

¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ²НТТУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського, Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.243-251

Наразі найрозповсюдженішим методом описання еволюцій у часі швидкозмінних процесів, які відбуваються при будівництві та експлуатації будівель від різноманітних впливів, є стохастичні рівняння, побудовані з використанням стохастичного диференціалу Іто. При цьому розглядаються задачі оцінювання параметрів коефіцієнтів, побудови точного або наближеного розв'язку таких рівнянь та асимптотичної їх поведінки. Постає питання про використання наявної інформації про попередню поведінку процесу для прийняття рішень за аналогією до вже відомих ситуацій (метод кейсів – case-study). Зважаючи на практичні потреби фахівців будівельної галузі, важливе значення може мати запропонований метод, який дозволяє встановлювати аналогії між поведінкою будівлі на актуальному часовому проміжку та деякому часовому проміжку з попередньої історії її еволюції. Використовується узагальнений підхід до поняття дифузійного процесу та відповідна форма стохастичного рівняння. Розроблено концепцію вказаного підходу до стохастичних процесів такого типу для аналізу можливого використання фінансових інструментів, таких, зокрема, як форварди, ф'ючерси, опціони, різноманітні свопи та інші. Розроблений підхід дозволяє класифікувати поведінку відповідного випадкового процесу експлуатації будівлі на часових інтервалах.

Ключові слова: дифузійні процеси, стохастичні диференціальні рівняння, будівлі, моделі еволюції цін, коефіцієнт тренду, коефіцієнт волатильності, метод кейсів.

Вступ. Однією з найбільш розповсюджених математичних моделей для еволюції скалярної або векторної величини в часі є модель дифузійного процесу. Як показано в роботах [1-3], поняття дифузійного процесу тісно пов'язане з поняттям стохастичного диференціального рівняння, рішенням якого при вельми широких припущеннях є дифузійний процес. Хоча спочатку основними об'єктами, до яких було застосовано відповідну теорію, були випадкові процеси в приладах радіоелектроніки, а також моделі теоретичної фізики, сьогодні, мабуть, найбільш активною областю їх застосування, що розвивається, є стохастична фінансова математика. Не зважаючи на існуючі певні складнощі з обґрунтуванням мартингалного підходу до процесів фінансового ринку в будівництві, виникають все нові, більш складні моделі еволюції цін. При цьому визначальними є змінні як у

часі, так і в межах цінової шкали характеристики тренда і волатильності, що відповідають традиційним для дифузійних процесів характеристикам переносу і дифузії. Будучи абсолютно коректним з математичної точки зору, такий підхід суттєво ускладнює побудову аналогій між поведінкою процесу на різних інтервалах часу. Стохастичні диференціальні рівняння, що виникають в цих випадках, дуже рідко вдається вирішити в явному вигляді, завдання граничної поведінки їх рішень не завжди мають практичний сенс.

В зв'язку з цим з'являється задача розгляду дифузійних процесів з характеристиками переносу і дифузії, визначеними на часових інтервалах, обґрунтування існування рішень відповідних рівнянь Колмогорова і стохастичних диференціальних рівнянь. Розглядаються адаптовані для такого підходу узагальнення відомих моделей фінансової динаміки. Формуються пропозиції по використанню накопичених на часових інтервалах характеристик тренда будівництва і волатильності при використанні методу кейсів вивчення еволюції показника.

Виклад основного матеріалу

Нехай $X(t)$ – марковський випадковий процес з перехідною ймовірністю $P(s, x, t, A)$, тобто

$$P\{X(t) \in A / X(s) = x\} = P(s, x, t, A), \quad s, t, \in [0; +\infty), x \in R, A \subset R.$$

Такий процес називається дифузійним, якщо виконані умови

$$\begin{cases} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{|x-y| < \varepsilon} P(s, x, t + \Delta, dy) = 0, \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{|x-y| < \varepsilon} (y-x) P(s, x, t + \Delta, dy) = a(s, x), \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{|x-y| < \varepsilon} (y-x)^2 P(s, x, t + \Delta, dy) = \sigma^2(t, x), \end{cases} \quad (1)$$

для будь-яких $\varepsilon > 0, x \in R$.

В роботі [4] було запропоновано розглядати в якості дифузійного випадковий процес $X(t)$ для якого:

$$\begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \int_{|x-y| > \varepsilon} P(t_{k-1}, x, t_k, dy) = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \int_{|x-y| < \varepsilon} (y-x) P(t_{k-1}, x, t_k, dy) = a(s, t, x), \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \int_{|x-y| < \varepsilon} (y-x)^2 P(t_{k-1}, x, t_k, dy) = b(s, t, x) = \sigma^2(s, t, x), \end{cases} \quad (2)$$

де $x \in R, s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, [s, t] \subset [0; +\infty]$. Отримані таким чином функції $a(s, t, x)$ і $b(s, t, x)$ є накопиченими на часовому інтервалі $[s, t]$ характеристиками переносу (тренду) і дифузії (волатильності) процесу $X(t)$. Відзначимо також, що зазначені функції при всякому фіксованому значенні $x \in R$, відповідно, зарядом і мірою на $[0; +\infty)$.

Додаткова умова

$$\sup_{\Delta} \left| \sum_{k=1}^n \int (y-x) P(t_{k-1}, x, t_k, dy) \right| < C \quad (3)$$

для деякого $\gamma > 0$.

У випадку, якщо $X(t)$ є дифузійним процесом в описаному вище сенсі і виконання умови (3) забезпечує обмеженість і неперервність по сукупності змінних функції $V(s, x) = \int f(y) P(s, x, t, dy)$ разом з її частинними похідними $\frac{\partial V}{\partial x}$ і $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, де $f(y)$ – деяка функція $y \in R$, то справедливе співвідношення

$$V(s, x) - f(x) = \int_s^t \frac{\partial V}{\partial x}(u, x) a(du, x) + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(u, x) b(du, x). \quad (4)$$

Зазначимо також, що якщо

а) перехідна ймовірність $P(s, x, t, dy)$ розглянутого вище дифузійного процесу задовольняє наступній умові: для будь-якої обмеженої, двічі неперервно диференційовної функції $f(x)$ функція $g(s, t, x) = \int f(y) P(s, x, t, dy)$ неперервна за сукупністю змінних, двічі неперервно диференційовна по x , причому для всіх x і будь-якої міри μ , щодо якої абсолютно неперервні $a(du, x)$ і $b(du, x)$ справедливі рівності

$$\begin{cases} \lim_{\substack{t \downarrow u \\ s \uparrow u}} g(s, t, x) = f(x), \\ \lim_{\substack{t \downarrow u \\ s \uparrow u}} g'_x(s, t, x) = f'(x), \\ \lim_{\substack{t \downarrow u \\ s \uparrow u}} g''_{xx}(s, t, x) = f''(x). \end{cases}$$

б) існує $\gamma > 0$ таке, що при $\forall x \in R$, μ – майже всіх $s, t, [s, t] \subseteq [0; T]$ виконано нерівність $\int |y-x|^{2+\gamma} P(s, x, t, dy) \leq \alpha([s, t], x) \mu[s, t]$, де $\alpha([s, t], x) \rightarrow 0$ при $t \downarrow s$; при цьому мають місце рівності

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{\int (y-x) P(s, x, t, dy)}{\mu[s, t]} = a(s, x);$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{\int (y-x)^2 P(s, x, t, dy)}{\mu[s, t]} = b(s, x).$$

в) траєкторії процесу неперервні з ймовірністю 1;

г) коефіцієнти $a(du, x)$, $b(du, x)$ абсолютно неперервні відносно міри μ з щільностями $a(u, x)$, $b(u, x)$ відповідно, причому ці щільності обмежені і неперервні по x в будь-якій обмеженій області R всюди, за виключенням,

можливо точок, в околах яких ці функції обмежені всюди, крім самих точок; і точок $M_0(x_0, t_0)$, для яких знайдуться околи, в яких

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq \frac{C_1}{(\mu[t_0, t])^{1-\gamma}} \quad \text{при} \quad 0 < t - t_0 < \alpha, \quad 0 < |x - x_0| < \beta, \gamma > 0,$$

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq \frac{C_2}{(\mu[t, t_0])^{1-\gamma}} \quad \text{при} \quad 0 < t_0 - t < \alpha, \quad 0 < |x - x_0| < \beta, \quad \text{то процес}$$

$$Y(t) = X(t) - X(0) - \int_0^t a(du, X(u)) \quad \text{є мартингалом з квадратичною}$$

$$\text{характеристикою} \quad \int_0^t b(du, X(u)).$$

З вищевикладеного виникає правомірність розгляду стохастичного диференціального рівняння виду

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u, X(u))\mu(du) + \int_0^t \sigma(u, X(u))dw(m(u)), \quad (5)$$

де $\sigma^2(u, x) = b(u, x)$, $m(t) = \mu[0, t]$, $MX^2(t) < +\infty$, $X(0)$ не залежить від $w(m(t))$, $t \in [0, T]$.

Зауваження 1. Накладення на коефіцієнти дифузійного процесу, що задовольняє рівнянню (5), умов, які передбачають їх абсолютну неперервність щодо міри $\mu(dt)$, фактично означає, при порівнянні з стохастичними диференціальними рівняннями $dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t)$, які розглядаються традиційно, здійснення заміни часу $t \rightarrow m(t)$ для випадкового процесу $X(t)$.

Зауваження 2. Традиційний розгляд еволюції ринкових цін (наприклад, на фондовому або валютному ринках) виявляється найбільше «комфортним» саме у випадку «проінтегрованого» стохастичного диференціального рівняння.

Розглянемо найпростіші приклади конверсії відомих моделей з допомогою запропонованої вище ідеї. Нехай $X(t)$ – вінерівський процес зі зносом: $dX(t) = adt + \sigma dw(t)$, де $w(t)$ – стандартний вінерівський процес.

У цьому випадку природним є розгляд модифікованого процесу $\tilde{X}(t) = X(0) + \mu[0, t] + \sigma w(t)$, або процесу більш загального виду

$$X^*(t) = X(0) + \mu[0, t] + \sigma w(m(t)), \quad (6)$$

де $m(t) = \mu_1[0, t]$, $\mu(dt)$, $\mu_1(dt)$ - неатомічні міри на $[0; +\infty]$. При цьому параметри процесу $X^*(t)$ мають природні статистичні оцінки: $\mu[0, t]$ оцінюється як тренд, а величина $\sigma^2 \mu_1[0, t]$ - як мартингальна квадратична характеристика. Відповідно $a(s, t, x) = \mu[s, t]$, $b(s, t, x) = \sigma^2 \mu_1[s, t]$.

У випадку так званого процесу Орнштейна-Уленбека [5] маємо рівняння: $dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dw(t)$, рішення якого має вигляд

$$X(t) = X(0)e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dw(s). \quad (7)$$

Традиційний метод рішення такого рівняння передбачає використання підстановки $f(t) = X(t)e^{\theta t}$, яка для конверсованого рівняння

$$X^*(t) = X(0) + \int_0^t (a - X^*(u))\mu(du) + \sigma w(t) \quad \text{має вигляд} \quad f^*(t) = X^*(t)e^{\mu[0,t]},$$

звідси

$$\begin{aligned} df^*(t) &= ((a - X^*(t))\mu(dt) + \sigma dw(t))e^{\mu[0,t]} + X^*(t)e^{\mu[0,t]}\mu(dt) = \\ &= a\mu(dt)e^{\mu[0,t]} + \sigma dw(t)e^{\mu[0,t]}, \end{aligned}$$

$$X^*(t)e^{\mu[0,t]} = X(0) + a \int_0^t e^{\mu[0,u]}\mu(du) + \sigma \int_0^t e^{\mu[0,u]}dw(u)$$

і остаточно маємо

$$X^*(t) = X(0)e^{-\mu[0,t]} + a(1 - e^{-\mu[0,t]}) + \sigma \int_0^t e^{-\mu[u,t]}dw(u). \quad (8)$$

Звертаючись до моделей стохастичної фінансової математики, зазначимо можливість конверсії рівняння, що описує традиційну модель Блека-Шоулза [6]:

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma X(t)dw(t).$$

В цьому випадку маємо для ціни Європейського опціону наступне рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + aS \frac{\partial V}{\partial S} - aV = 0.$$

Конверсований (“проінтегрований по t ”) вигляд такого рівняння

$$V(S, t) + \frac{1}{2} \int_0^t S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} b(du) + \int_0^t S \frac{\partial V}{\partial S} a(du) - \int_0^t V a(du) = 0. \quad (9)$$

Маючи на увазі, що $a(s, t, x) = xa(s, t)$, $b(s, t, x) = x^2 b(du)$.

Припускаючи, що $b(du) = du$, відоме рішення стохастичного рівняння в цьому випадку можемо записати як

$$X^*(t) = X(0) \exp \left\{ \mu[0, t] - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma w(t) \right\}. \quad (10)$$

Зазначимо, що в моделях фондового ринку дуже близьких до моделі Блека і Шоулза (іменованої також моделлю Блека-Шоулза-Мертонна) є модель Хо і Лі [7]:

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \sigma dw(t).$$

В нашому випадку, така модель при її конверсії відповідає конверсійному варіанту вінеровського процесу зі зносом (6).

Відповідно, модель Васичека [8] еквівалентна розглянутій вище моделі Орнштейна-Уленбека.

У випадку моделі Дотхана [9] отримуємо ще один варіант моделі Блека-Шоулза, який відображається співвідношеннями (9), (10).

На відміну від розглянутих вище, підхід Зандманна і Зондерманна передбачає, по-перше, розгляд перетвореного процесу цінової еволюції $X(t)$ – виписується рівняння для $Y(t) = \ln(1 + X(t))$. По-друге, таке рівняння має вигляд:

$$d \ln Y(t) = (\theta(t) + \rho(t) \ln Y(t))dt + \sigma(t)dw(t), \quad (11)$$

$$\text{де } \rho(t) = \frac{d}{dt} \ln \delta(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}.$$

Позначивши в цьому випадку $Z(t) = \ln Y(t)$, приводимо співвідношення

$$(11) \text{ до виду } d\left(\frac{z(t)}{\sigma(t)}\right) = \frac{\theta(t)}{\sigma^2(t)}dt + dw(t), \text{ тобто, аналогічно попередньому}$$

(11*) $dZ^* = d\mu + dw$, де $Z^*(t)$ – «нормований» процес $Z(t)$, $\mu[0, t]$ – деяка не атомічна міра.

Висновки. Запропонований підхід до дифузійних моделей, сформульований вперше в роботі [4], дозволяє, на думку авторів, по-перше, покращити можливості застосування класичних моделей у будівництві шляхом використання заміни часу, і, по-друге, реалізувати новий підхід до використання на практиці зведення та експлуатації будівель, яка зводиться до використання методу кейсів [11], тобто пошуку аналогій із ситуацією, яка спостерігається для еволюції параметра, в історії спостережень, що існують. Таку можливість надає характеристика параметрів експлуатації будівель не в точці, а на часовому інтервалі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Буценко Ю.П. К теории диффузии. Вероятностный бесконечномерный анализ. Киев, Институт математики АН УССР, 1981. С. 30-38.
2. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion. Physical Revue. – 1930. v. 36, i.5: P. 823-841.
3. Black F., Scholes M. The pricing of options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. – 1973. v.81, i.3: P.637-654.
4. Ho T.S.Y., Lee S.B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of finance. – 1986. v. 41, i.5: P.1011-1029.
5. Vasichak O. An equilibrium characterization of term structure. Journal of Financial Economics. – 1977. v. 5, i.2: P. 177-188.
6. Dothan L.U. On the term structure of interest rates. Journal of Financial Economics. – 1978. v. 6, i.1: P. 59-69.
7. Sandmann K., Zondermann D. Interest rate options. Geld, Banken, Versicherungen. Karlsruhe, ed. W. Heilman. -1992.:P. 739-760.
8. Eisenhardt R.M. Building theories from case study research. Academy of Management Review. – 1989. v. 14, i.4: P. 352-550.
9. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. /Москва: Мир. 1968. - 364 с.
10. Oksendal, Berndt K. Stochastic differential equations. An Introduction with application./ Berlin: Springer. 2010. - 379 p.
11. Шуряев А.Н. Основы стохастической финансовой математики (в 2т.)/ Москва: Фазис. 1998. - 512 с.+544 с.

REFERENCES

1. Butsenko Y.P. (1981). К теорії дифузії. Вероятностный бесконечномерный анализ. – К.: Институт математики АН УССР, с. 30-38 [in Russian].
2. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. (1930). On the theory of Brownian motion. Physical Review. v. 36, i.5, pp. 823-841.
3. Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy v.81, i.3, pp.637-654.
4. Ho T.S.Y., Lee S.B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of finance. V. 41, i.5, pp.1011-1029.
5. Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of term structure// Journal of Financial Economics. V. 5, i.2, pp. 177-188.
6. Dothan L.U. (1978). On the term structure of interest rates. Journal of Financial Economics v. 6, i.1, pp. 59-69.
7. Sandman K., Zondermann D. (1992). Interest rate options. Geld, Banken, Versicherungen.- Karlsruhe, ed. W. Heilmann, pp. 739-760.
8. Eisenhardt R.M. (1989). Building theories from case study research. Academy of Management Review, v. 14, i.4, pp. 352-550.
9. Ito K., McKean G. (1968) Дифузионные процессы и их траектории. Москва: Мир, 1968 [in Russian].
10. Oksendal, Berndt K. (2010) Stochastic differential equations. An Introduction with application. Berlin: Springer.
11. Shiryayev A.N. (1998). Основы стохастической финансовой математики (в 2т.). Москва: Фазис [in Russian].

Стаття надійшла до редакції 03.06.2019 р.

Getun G., Butsenko Yu., Balina O., Bezklubenko I., Solomin A.

DIFFUSION MODELS WITH ACCUMULATED CHARACTERISTICS WHEN OPERATING BUILDINGS

Currently, the most common method of describing the evolution in time of rapidly changing processes that occur during the construction and operation of buildings from different influences is stochastic equations, constructed using the Ito's stochastic differential. For equations of this kind problems of estimating the parameters of their coefficients, building exact and approximate solutions, describing of asymptotic behavior of their solutions are considered. For all importance of such results, they, more often than not, turn out to be insufficient for developing practical recommendations in the process of using financial instruments. In connection with the above, the question arises of using the available information about the previous evolution of the process for making decisions by analogy with already known situations (the case - study method). Taking into account the practical needs of the construction industry, it is important to develop methods that allow to establish analogies between the behavior of the building of changing the price indicator on the current time interval and some time period from the previous history its evolution. Development of innovative method for comparing the behavior of a random process of diffusion type, associated with the evolution of market indicators, at various time intervals. The methods of the mathematical theory of diffusion, stochastic differential equations, as well as their generalization to the case of locally infinitely divisible processes are used. A generalizations approach to the concept of a diffusion process and the corresponding form of a stochastic differential equation proposed. The concept of the described approach to stochastic processes of this type has been developed for analyzing the possible use of financial instruments in the evolution of market indicators. An innovative technology has been created for teaching the use of financial instruments, such as futures, forwards, options, various swaps and others. Observations on the evolution over time of the price indicator makes it possible to determine and use previously accumulated experience concerning periods of similar evolution. The developed approach allows to classify the behavior of random process of building operation at time intervals.

Keywords: diffusion processes, stochastic differential equations, building, models of evolution of prices trend coefficient, volatility coefficient, case study.

Гетун Г.В., Буценко Ю.П., Баліна Е.И., Безклубенко І.С., Соломін А.В.

ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ С НАКОПИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЗДАНИЙ

В настоящее время наиболее распространенным методом описания эволюции во времени быстроменяющихся процессов, которые происходят при строительстве и эксплуатации зданий от разных воздействий являются стохастические уравнения, построенные с использованием стохастического дифференциала Ито. При этом рассматриваются задачи оценивания параметров коэффициентов, построения точного или приближенного решений таких уравнений и описания их асимптотического поведения. При всей важности таких результатов, они, чаще всего, оказываются недостаточными при наработке практических рекомендаций в конкретных случаях. В связи с этим встает вопрос об использовании имеющейся информации о предыдущей эволюции процесса для принятия решений по аналогии с уже известными ситуациями (метод кейсов – case-study). Учитывая практические потребности специалистов строительной отрасли, важное значение имеет метод, позволяющий устанавливать аналогии между поведением здания на актуальном временном промежутке и некотором временном промежутке из предыдущей истории его эволюции. Разработка инновационных методов сравнения поведения процесса диффузионного типа, связанного с эволюцией рыночных показателей, на различных временных интервалах. Используются методы математической теории диффузии, стохастических дифференциальных уравнений и их обобщения на случай локально-безгранично делимых случайных процессов. Предложен обобщенный подход к понятию диффузионного процесса и, соответствующая форма стохастического уравнения. Разработана концепция описанного подхода к стохастическим процессам такого типа для анализа возможного использования финансовых инструментов при эволюции рыночных показателей путем изучения аналогичных по накопленным характеристикам ситуаций (метод кейсов – case-study). Создана инновационная технология обучения использованию финансовых инструментов, таких, в частности, как форварды, фьючерсы, опционы, разнообразные свопы и другие. Наблюдение за эволюцией во времени ценового показателя позволяет определять и использовать ранее накопленный опыт, касающийся периодов аналогичной его эволюции. Разработанный подход позволяет классифицировать поведение случайного процесса эксплуатации здания на временных интервалах.

Ключевые слова: диффузионные процессы, стохастические дифференциальные уравнения, здания, модели эволюции цен, коэффициент тренда, коэффициент волатильности.

УДК 725

Гетун Г.В., Буценко Ю.П., Баліна О.І., Безклубенко І.С., Соломін А.В. Дифузійні процеси з накопичувальними характеристиками при експлуатації будівель // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 243-251.

Розглядаються задачі оцінювання параметрів коефіцієнтів і розв'язків стохастичних рівнянь, що використовуються для описання швидкозмінних процесів, які відбуваються при будівництві та експлуатації будівель. Досліджується асимптотична поведінка таких розв'язків.

Табл. 0. Іл. 0. Бібліогр. 11 назв.

Getun G., Butsenko Yu., Balina O., Bezklubenko I., Solomin A. Diffusion models with accumulated characteristics when operating buildings // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 243-251.

The problems of estimating the parameters of coefficients and solutions of stochastic equations used to describe the fast-moving processes that occur when the construction and operation of buildings are considered. The asymptotic behavior of such solutions is studied.

Tabl. 0. Pic. 0. Bibliogr. 11 titles.

Гетун Г.В., Буценко Ю.П., Балина Е.И., Безклубенко И.С., Соломин А.В. Диффузионные модели с накопительными характеристиками при эксплуатации зданий // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. – С. 243-251.

Рассматриваются задачи оценки параметров коэффициентов и решений стохастических уравнений, используемых для описания быстротекучих процессов, которые происходят при строительстве и эксплуатации зданий. Исследуется асимптотическое поведение таких решений.

Табл. 0. Ил. 0. Библиогр. 11 назв.

Автор: кандидат технічних наук, професор, професор кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури ГЕТУН Галина Вячеславівна

E-mail: GalinaGetun@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-3317-3456>

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірності НТТУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського БУЦЕНКО Юрій Петрович

E-mail: armchairdoc@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-4806-9587>

Автор: кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики Київського національного університету будівництва і архітектури БАЛІНА Олена Іванівна

E-mail: elena.i.balina@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-6925-0794>

Автор: Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики Київського національного університету будівництва і архітектури БЕЗКЛУБЕНКО Ірина Сергіївна

E-mail: i.bezklubenko@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9149-4178>

Автор: кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри біобезпеки і здоров'я людини НТТУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського СОЛЮМІН Андрій Вячеславович

E-mail: andr-sol@i.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5226-8813>

УДК 539.3

ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИНАМІЧНОГО ФОРМОЗМІНЕННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТА ПЛОСКОДЕФОРМІВНИХ ТІЛ

Ю.В. Максим'юк,
канд. техн. наук, доцент

І.І. Солодей,
д-р техн. наук, старший науковий співробітник

Р.Л. Стригун

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.252-262

В роботі розглянуто вихідні співвідношення геометрично нелінійної задачі динаміки для дослідження процесів істотного пластичного деформування. Наведена постановка задачі при умові контактної взаємодії тіл. Представлені рівняння стану у відліковій початковій, відліковій змінній та актуальній системах координат.

Ключові слова: тіла обертання, геометрична нелінійність, фізична нелінійність, пластичні деформації, контактні напруження, динамічне навантаження.

Вступ. Широке застосування у різних галузях техніки знаходять елементи і деталі, які в процесі виготовлення або експлуатації знаходяться в умовах суттєвого пластичного деформування. Характерні процеси відбуваються при виготовленні або встановленні ущільнюючих кільцевих прокладок, заклепок у з'єднувальних операціях, обробці заготовок тиском і т.і. Як правило, механічні процеси, що розглядаються відбуваються під впливом інтенсивних динамічних навантажень. Суттєво на перебіг деформування впливає також умова їх взаємодії з контактуючими частинами інструменту. Подальше вдосконалення технологічних процесів та проектних рішень відповідальних вузлів конструкцій і обладнання багато в чому залежить від точності інформації про особливості зміни картини напружено-деформованого стану об'єктів в процесі деформування.

За останні роки вимоги до побудови механічних моделей дослідження процесів виготовлення та експлуатації різноманітних елементів конструкцій значно виросли, що визначається підвищенням рівня точності та достовірності результатів, спонукаючи використання все більш і більш докладних розрахункових схем. Крім того, труднощі дослідження поведінки конструкцій при наявності динамічних навантажень багатократно збільшуються у порівнянні із статичним аналізом.

У зв'язку з цим підвищується актуальність розробки ефективних методик дослідження процесів пластичного формозмінення тіл з урахуванням геометричної нелінійності та контактної взаємодії під дією динамічних навантажень.

1. Вихідні співвідношення

Розглянемо тіло обертання в базисній круговій циліндричній системі координат Z^i , вісь Z^1 якої збігається з віссю обертання, Z^2 спрямована вздовж радіуса, а Z^3 співпадає з кільцевою координатою (рис. 1).

Базисна система координат є незмінною і призначена для опису вихідної інформації про зовнішні дії, граничні умови і геометрію об'єкта. В ортогональній

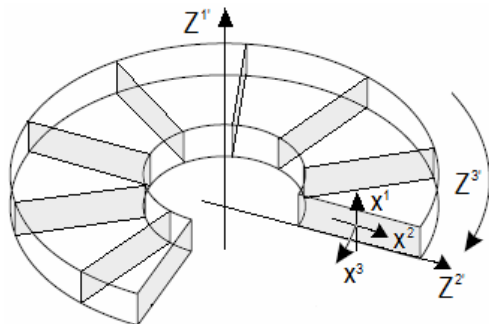


Рис. 1. Тіло обертання

циліндричній системі координат відмінні від нуля наступні компоненти метричного тензора g_{ij} , що визначають масштаби базисних векторів [1]:

$$g_{ij}=1, g_{3,3}=(Z^2)^2. \quad (1)$$

Тут і надалі індекси, позначені грецькими буквами приймають значення 1,2, латинськими - 1,2,3.

Для опису напружено-деформованого стану тіл, які змінюють в процесі навантаження свою початкову форму, введемо в розгляд місцеву супроводжуючу криволінійну систему координат x^i , осі якої x^1 і x^2 розташовані в меридіональному перерізі, а x^3 збігається за напрямком з Z^3 (рис. 1) Зв'язок між місцевою і базисною системами визначається за допомогою тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha} = \frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad Z_{,3}^{\alpha} = Z_{,\beta}^{\alpha} = 0. \quad (2)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в місцевій системі координат визначаються через компоненти метричного тензора базисної системи:

$$g_{mn} = Z_{,m}^i Z_{,n}^j g_{ij}. \quad (3)$$

Для використаних систем координат формулу (3) можна спростити:

$$g_{\alpha\beta} = Z_{,\alpha}^v Z_{,\beta}^v g_{ij}, \quad g_{33} = (Z^2)^2. \quad (4)$$

Контраваріантні компоненти метричного тензора знаходяться за відомими значеннями коваріантних:

$$g^{mn} = \frac{A(g_{mn})}{g}, \quad (5)$$

де $A(g_{mn})$ - алгебраїчне доповнення до елемента g_{mn} матриці, побудованої з коваріантних компонент метричного тензору, $g = \det(g_{mn})$ - визначник цієї матриці.

Місцева система координат x^1 та x^2 пов'язана з матеріальними точками тіла і при навантаженні деформується разом з ним. У цьому

випадку зміна метричних характеристик координатної системи в кожній точці є мірою деформації тіла, що дозволяє однозначно визначити геометрію деформованого тіла за його вихідним станом. У подальшому будемо розрізняти три конфігурації тіла: відлікову початкову, відлікову змінну і актуальну. Компоненти метричного тензора цих станів позначимо відповідно \bar{g}_{ij} , g_{ij} , G_{ij} . Відлікову змінну конфігурацію приймаємо досить близькою до актуальної, таким чином щоб у порівнянні з величиною метричного тензора g_{ij} приріст $\Delta G_{ij} = G_{ij} - g_{ij}$ був нехтувано малою величиною.

Компоненти тензора деформацій ϵ^{ij} в актуальній конфігурації визначимо використовуючи міру деформацій Фінгера [1], контраваріантні компоненти якої дорівнюють відповідним компонентам метричного тензора відлікової початкової конфігурації $F^{ij} = \bar{g}^{ij}$. Тобто:

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(F^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2}(\bar{g}^{ij} - G^{ij}). \tag{6}$$

Використовуючи змінну відлікову конфігурацію (6) можна представити у вигляді суми:

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}^{ij} - g^{ij} + g^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2}(\bar{g}^{ij} - g^{ij}) + \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij}) = \bar{\epsilon}^{ij} + \epsilon^{ij}, \tag{7}$$

де $\bar{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}^{ij} - g^{ij})$ - деформації тіл в змінній відрахунковій конфігурації по відношенню до початкового стану; $\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij})$ - деформації тіла в актуальній конфігурації по відношенню до змінної відлікової.

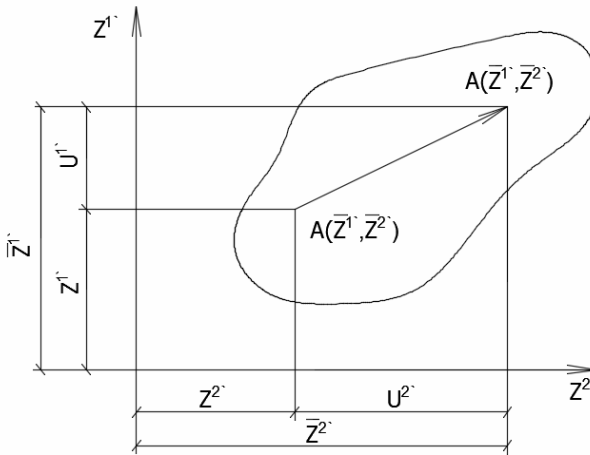


Рис. 2. Змінна відлікова і актуальна конфігурації

Визначимо деформації ε^{ij} через переміщення $U^{\alpha'}$, задані в базисній системі координат. На рис. 2 показано положення деякої точки A , що належить меридіональному перетину тіла обертання змінної відлікової і актуальної конфігурації. Нове положення точки A в системі $Z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = \bar{Z}^{\alpha'} + U^{\alpha'} \quad (8)$$

Диференціюючи за координатами місцевої системи x^i ділимо компоненти тензора перетворень:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = \bar{Z}_{,\beta}^{\alpha'} + U_{,\beta}^{\alpha'} \quad (9)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації рівні:

$$G_{\alpha\beta} = \bar{Z}_{,\beta}^{\alpha'} + U_{,\beta}^{\alpha'}, \quad G_{33} = (Z^2)^2 \quad (10)$$

або

$$G_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, \quad G_{33} = \bar{g}_{33} + \Delta G_{33}, \quad (11)$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = (Z_{,\alpha}^{\nu'} U_{,\beta}^{\nu'} + Z_{,\beta}^{\nu'} U_{,\alpha}^{\nu'} + U_{,\alpha}^{\nu'} U_{,\beta}^{\nu'})$$

або

$$\Delta G_{\alpha\beta} = \left[2Z^2 U^2 + (U^2)^2 \right]. \quad (12)$$

Контраваріантні компоненти $G^{\alpha\beta}$ визначаються з умови:

$$G^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad (13)$$

тоді

$$G^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} - \delta_{\gamma}^{\alpha} = (\bar{g}^{\alpha\beta} + \Delta G^{\alpha\beta})(\bar{g}_{\beta\gamma} + \Delta G_{\beta\gamma}) - \delta_{\gamma}^{\alpha} = 0.$$

Відкидаючи вираз для малих величин $\Delta G^{\alpha\beta} \Delta G_{\beta\gamma}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta G^{\alpha\beta} \bar{g}_{\beta\gamma} + \bar{g}^{\alpha\beta} \Delta G_{\beta\gamma} &= 0, \\ \Delta G^{\alpha\eta} \bar{g}_{\beta\gamma} &= -\bar{g}^{\alpha\beta} \Delta G_{\beta\gamma} \bar{g}^{\eta\gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Повертаючись до (7) із врахуванням (13) маємо:

$$\Delta \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2} (\bar{g}^{ij} - \bar{g}^{ij} + G^{im} \Delta G_{mn} G^{nj}) \approx \frac{1}{2} \bar{g}^{im} \bar{g}^{jn} \Delta G_{mn}. \quad (15)$$

Коваріантні компоненти деформації актуальної конфігурації відносно змінної відрахункової рівні:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\bar{Z}_{,\alpha}^{\nu'} U_{,\beta}^{\nu'} + \bar{Z}_{,\beta}^{\nu'} U_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \bar{Z}^2 U^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Згідно до прийнятих гіпотез геометричні рівняння (15) справедливі при малих деформаціях $\Delta \varepsilon_{ij}$ і великих переміщеннях (кути повороту), а (16) тільки при малих деформаціях і малих переміщеннях (кутах повороту).

За межами пружності зв'язок між пружними деформаціями, напруженнями, деформаціями пластичності визначається рівняннями теорії пластичної течії із ізотропним зміцненням [4-6]. Використовуються наступні передумови:

1. Компоненти повних деформацій ε^{ij} дорівнюють сумі пружних ε_e^{ij} і пластичних ε_p^{ij} :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_e^{ij} + \varepsilon_p^{ij}. \quad (17)$$

2. Повні напруження σ^{ij} визначаються відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = \left[\mu \left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j \right) + \lambda G^{ij} G_{kl} \right] \varepsilon_e^{kl} \quad (18)$$

та можуть бути представлені у вигляді:

$$\sigma^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} + \Delta \sigma^{ij}, \quad (19)$$

де $\bar{\sigma}^{ij}$ – напруження, досягнуті під час деформування тіла у відліковій конфігурації, $\Delta \sigma^{ij}$ – приріст напружень, обумовлений пружними деформаціями тіла при деформації від змінної відрахункової до актуальної конфігурації.

У виразі (18):

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (20)$$

де λ - коефіцієнт Ляме, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

3. Приріст пластичних деформацій визначається згідно до асоційованого закону:

$$d\varepsilon_p^{ij} = \lambda_p \frac{df_p}{dS_{ij}} = \lambda_p S^{ij}, \quad (21)$$

де $S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 G^{ij}$ – компоненти девіатора напружень, f_p – функція текучості,

$$f_p = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2 = 0, \quad (22)$$

$$\tau_s = \tau_s(\alpha), \alpha = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_p^{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (23)$$

де τ_s – межа текучості при чистому зсуві, α - параметр зміцнюваності Одквіста.

Параметри τ_s , ν , E в рівняннях стану (22) визначаються з дослідів на простий розтяг або стискання. Діаграми зміцнення, побудовані в координатах σ^i (інтенсивність напружень) - α (Параметр Одквіста, який

для одновимірного деформування збігається з інтенсивністю логарифмічної міри деформацій ε_i , як показано в роботах [8, 9] досить повно характеризують поведінку матеріалу за межею пружності в процесах, близьких до простих та супроводжуються великими пластичними деформаціями.

2. Залежність між приростом деформацій і приростом напружень за межею пружності

Продиференціювавши вираз (16), встановлюємо зв'язок між приростом напружень та приростом пружних деформацій:

$$d\sigma^{ij} = \left[\mu \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda G^{ij} G^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e, \quad (24)$$

де

$$d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p. \quad (25)$$

Для визначення приросту деформацій пластичності використаємо співвідношення (21). Оскільки при пластичному деформуванні зображаюча точка залишається на поверхні текучості, виконується рівність:

$$df = \frac{\partial f_p}{\partial S^{ij}} dS^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \alpha} d\alpha = 0. \quad (26)$$

Часткові похідні в рівнянні (26) по S^{ij} та α дорівнюють:

$$\frac{\partial f_p}{\partial S^{ij}} = S^{ij}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \alpha} = -2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha}. \quad (27)$$

Перепишемо співвідношення (26) з урахуванням (27), приймаючи до уваги, що $S_{ij} dS^{ij} = S_{ij} d\sigma^{ij}$:

$$S_{ij} d\sigma^{ij} - 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha} d\alpha = 0. \quad (28)$$

Враховуючи (24) та (25) рівняння (28) можна записати у вигляді:

$$S_{ij} \left[\mu \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda G^{ij} G^{kl} \right] * \left(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p \right) = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (29)$$

Представимо приріст пластичних деформацій у відповідності до формули (21). Після підстановки і відповідних перетворень запишемо вираз λ_p для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2GS^{kl} d\varepsilon_{kl}}{\gamma^p}, \quad (30)$$

де

$$\gamma_p = 2GS^{kl} S^{kl} + \frac{4}{3} \sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha} = 4\tau_s^2 \left(G + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \alpha} \right),$$

$$d\sigma^{ij} = \left[\left\{ \mu \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda G^{ij} G^{kl} \right\} - 4G^2 S^{ij} S^{kl} \left(\frac{1}{\gamma_p} \right) \right] * \left(d\varepsilon_{kl} \right).$$

3. Моделювання взаємодії тіл

Для моделювання взаємодії тіл вводиться тонкий контактний шар, в межах якого напружено-деформований стан описується в додатковій системі координат y'' , що пов'язана з конфігурацією поверхонь тіл (рис. 3).

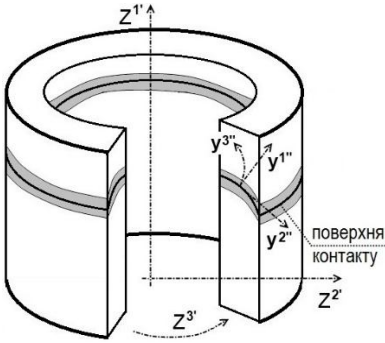


Рис. 3. Моделювання взаємодії тіл

В кожний момент часу t забезпечуються умови непроникнення, тертя на основі закону Кулона та відсутність розтягуючих напружень нормальних до поверхні контакту:

$$\sigma_t^{n''(n'')} \leq 0, \tau_t \leq f_{fr} \sigma_t^{n''(n'')}, \quad (31)$$

де f_{fr} - коефіцієнт тертя, n'' - нормаль до поверхні контакту.

Приймається, що для контактної шару щільність матеріалу та коефіцієнт Пуассона дорівнюють нулю:

$$\rho_c = 0, \nu_c = 0. \quad (32)$$

Формулювання (32) забезпечує безмасовість границі та миттєву передачу зусиль від одного тіла до іншого при динамічному навантаженні.

4. Постановка задачі динаміки

Навантаження, що діє споруду або обладнання, відносять до динамічного, якщо воно змінює свою величину протягом порівняно короткого проміжку часу. При дії такого навантаження розвиток деформацій системи та поява переміщень представляє собою деякий процес, що змінюється у часі. Маси елементів самої споруди, а також пов'язаного з ним обладнання, в процесі деформування отримують прискорення, що в свою чергу призводить до появи сил інерції, які діють на споруду зі сторони рухомих мас.

Розрахунок з урахуванням сил інерції та викликаних при цьому коливаннях називають динамічним розрахунком. Його метою в загальному випадку є визначення у часі закону руху мас системи, знаючи який можна дати оцінку міцності та жорсткості системи.

Для спрощення інколи розрахунок споруди виконується як статичний, а динамічний характер дії враховується за допомогою так званих динамічних коефіцієнтів. Однак навіть для визначення динамічних коефіцієнтів необхідно вміння проводити саме динамічний розрахунок. Крім того, далеко не завжди за допомогою коефіцієнтів можна урахувати всю своєрідність процесу динамічного деформування.

Рух неоднорідного ізотропного тіла, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описується рівнянням, що є наслідком принципу Д'Аламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [1, 7]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'} . \quad (33)$$

Однозначність розв'язання (33) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}) , \quad \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}) , \quad Z^{i'} \in V . \quad (34)$$

Припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t) , \quad Z^{i'} \in S_u , \quad (35)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{ki}, t) , \quad Z^{k'} \in S_p . \quad (36)$$

Диференціальне рівняння (33) з граничними умовами (36) еквівалентно варіаційному принципу Гамільтона [2, 3]:

$$\delta T + \delta W - \delta A = 0 , \quad (37)$$

де $\delta W = \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV$ - варіація потенційної енергії деформації записана в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij} &= \epsilon_{ij} / \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} , \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} , \\ \tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} , \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}} . \end{aligned} \quad (38)$$

Тут $\delta A = \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_S p^{i'} \delta u_{i'} dS$ - варіація роботи внутрішніх та зовнішніх сил.

Для подання варіації кінетичної енергії δT використовується загальне формулювання із введенням додаткових гіпотез, щодо закону зміни прискорення точок елементарного об'єму тіла $\ddot{u}^{k'}(t)$ у часі:

$$\delta T = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^{k'}(t) \delta u_{k'}(t) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 , \quad (39)$$

виходячи з якого, можна отримати вирази для окремих важливих випадків, що визначаються параметрами навантаження, а саме законом його зміни, рівнем інтенсивності, швидкістю зростання та тривалістю у часі.

Висновок. Таким чином, для дослідження процесів істотного пластичного деформування отримані ефективні вихідні співвідношення геометрично нелінійної задачі динаміки. Визначені умови контактної взаємодії тіл. Представлені рівняння стану записані у відліковій початковій, відліковій змінній та актуальній системах координат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Блох В.И.* Теория упругости / [Блох В.И.] - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
2. *Вольмир А.С.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований / [Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.] –М.: Машиностроение, 1989. –248с.
3. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математической теории пластичности / [Друккер Д.] - Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
4. *Лур'є А.І.* Нелінійна теорія пружності / [Лур'є А.І.] - М.: Наука, 1980, 512с.
5. *Маликін М.М.* Прикладна теорія пластичності та повзучості / [Маликін М.М.] - Вид. Машинобудування, М., 1975, 399с.
6. *Поздеев А.А.* Великі пружнопластичні деформації / [Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.І.] -М., Наука, 1986, 232с.
7. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / [Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др.] - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
8. *Торхамов М.М.* Про зв'язок між напруженнями та скінченними пластичними деформаціями при простому навантаженні в просторі істинних напружень/ Ред.ж. «Прикл.Мех.», Київ, 1985, - 13с. Рукопис деп. в ВИНТИ, № 7899-В
9. *Тормахов М.М.* Перевірка постулату ізотропії в області скінченних прожно-пластичних деформацій / Київ. Інститут механіки АН УССР, 1985, 6с. Рукопис деп. в ВИНТИ, 1986, № 5507B86.

REFERENCES

1. *Blokh V.I.* Teoriya uprugosti (Theory of Elasticity) / [Blokh V.I.] - Khar'kov: Izd-vo Khar'k. un-ta.- 1964. –483s.
2. *Vol'mir A.S.* Statika i dinamika slozhnykh struktur: Prikladnyye mnogourovnevyye metody issledovaniya (Statics and dynamics of complex structures: Applied multilevel research methods) / [Vol'mir A.S., Kuranov B.A., Turbaivskiy A.T.] – М.: Mashinostroyeniye, 1989. –248s.
3. *Drukker D.* Variatsionnyye printsipy v matematicheskom teorii plastichnosti (Variational principles in the mathematical theory of plasticity) / [Drukker D.] - Mekhanika.- М.: IP, 1959.- № 6.
4. *Lurie A.I.* Neliniynaya teoriya pruzhnosti(Nonlinear theory of elasticity) / [Lurie A.I.] - М.: Nauka, 1980, 512s.
5. *Malikin M.M.* Pryingkladna teoriya plastychnosti ta povzuchosti (Applied theory of plasticity and creep) / [Malikin M.M.] -Vid. Machine-building, Moscow, 1975, 399s.
6. *Pozdeev A.A.* Velyki pruzhnoplastychni deformatsiyi. (Large elastoplastic deformations) / [Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.] -M., Science, 1986, 232s.
7. *Sakharov A.S.* Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel (The finite element method in solid mechanics) / [Sakharov A.S., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.V. i dr.] - Kiyev: Vishcha shkola, 1982.- 479s.
8. *Torkhamov M.M.* Pro zvyazok mizh napruzhenyamy ta skinchennymy plastychnymy deformatsiyamy pry prostomu navantazheni v prostori istynnykh napruzhen (On the connection between stresses and finite plastic deformations with simple loading in the space of true stresses) / Ed. "Prikl.Meh.", Kyiv, 1985, - 13s. Manuscript dep. In VINITI, No. 7899-V
9. *Tormakhov M.M.* Perevirka postulatu izotropiyi v oblasti skinchennykh prozhno-plastychnykh deformatsiy (Verification of the isotropy postulate in the area of finite forging-plastic deformations) / Kiev. Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of USSR, 1985, 6s. Manuscript dep. In VINITI, 1986, No. 5507B86

Стаття надійшла до редакції 14.06.2019 р.

Maksymyuk Yu.V., Solodei I.I., Strygun R.L.

ORIGINAL EQUATIONS OF A GEOMETRICALLY NONLINEAR DYNAMIC PROBLEM OF ESSENTIAL DEFORMATION FOR AXISYMMETRIC AND FLAT BODIES

Widely used in various fields of technology are the elements and details that are in the process of manufacturing or operating in conditions of significant plastic deformation. This is typical of sealing ring gaskets, rivets in connecting operations, blanks in metal processing, etc. As a rule, the mechanical processes under consideration occur under the influence of intense dynamic loads. Significantly, deformation is also influenced by the condition of their interaction with the contacting parts of the instrument. Further improvement of the constructive decisions of a significant number of

responsible nodes and technological processes largely depends on the completeness and reliability of the information on the peculiarities of changing the pattern of the stress-strain state of the selected class of objects in the process of deformation.

In recent years, the requirements for the construction of mechanical models for the study of the processes of manufacturing and operating components and equipment has grown significantly, which is determined by increasing the level of accuracy and reliability of the results, prompting the use of more and more detailed calculation schemes. In addition, the difficulties of studying the behavior of structures in the presence of dynamic loads is multiplied by comparison with static analysis.

In this connection, the importance of developing effective methods for studying the processes of plastic molding of bodies, taking into account geometric nonlinearity and contact interaction under the action of dynamic loads, increases.

The paper considers the original equations of a geometrically nonlinear dynamic problem for the study of processes of significant plastic deformation. The problem statement is given under the condition of contact interaction of bodies. The equations of state are presented in the reference initial, changeable and actual coordinate systems.

Keywords: body of rotation, geometric nonlinearity, physical nonlinearity, plastic deformation, contact stress, dynamic load.

Максимюк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.

ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ФОРМО- ИЗМЕНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ПЛОСКОДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

В работе рассмотрены исходные соотношения геометрически нелинейной задачи динамики для исследования процессов существенного пластического деформирования. Приведена постановка задачи при условии контактного взаимодействия тел. Представлены уравнения состояния в отсчетной начальной, отсчетной сменной и актуальной системах координат.

Ключевые слова: тела вращения, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, пластические деформации, контактные напряжения, динамическое нагружение.

УДК 539.3

Максим'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформованих тіл// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102.– С. 252-262.

В роботі розглянуто вихідні співвідношення геометрично нелінійної задачі динаміки для дослідження процесів істотного пластичного деформування. Наведена постановка задачі при умові контактної взаємодії тіл. Представлені рівняння стану у відліковій початковій, відліковій змінній та актуальній системах координат.

Іл. 3. Бібліогр. 9 назв.

UDC 539.3

Maksimiyuk Yu.V., Solodei I.I., Strygun R.L. Original equations of a geometrically nonlinear dynamic problem of essential deformation for axisymmetric and flat bodies // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 252-262.

The paper considers the original equations of a geometrically nonlinear dynamic problem for the study of processes of significant plastic deformation. The problem statement is given under the condition of contact interaction of bodies. The equations of state are presented in the reference initial, changeable and actual coordinate systems

Fig. 3. Ref. 9.

УДК 539.3

Максимюк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л. Исходные соотношения нелинейного динамического формозменения осесимметричных и плоскодеформируемых тел// Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 102. – С. 252-262.

В работе рассмотрены исходные соотношения геометрически нелинейной задачи динамики для исследования процессов существенного пластического деформирования. Приведена постановка задачи при условии контактного взаимодействия тел. Представлены уравнения состояния в отсчетной начальной, отсчетной сменной и актуальной системах координат.

Іл. 3. Бібліогр. 9 назв.

Автор: кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА МАКСИМ'ЮК Юрій Всеволодович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38

Мобільний тел.: +38(067) 230-94-72

E-mail: maximyuk@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

Автор: доктор технічних наук, старший науковий співробітник, заст. директора НДІ будівельної механіки Солодей Іван Іванович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38(044) 241-55-55

Мобільний тел.: +38(050)357-44-90

E-mail: isolodey@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

Автор: асистент кафедри будівельної механіки КНУБА Стригун Руслан Леонідович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38(044) 241-55-55

Мобільний тел.: +38(068) 790-56-51

E-mail: r.l.strigun@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-1174-5310>

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Максим'юк Ю.В.</i> Напружено-деформований стан і формозмінення масивних і тонкостінних об'єктів	3
<i>Caو Van Hoa, Nguyen Anh Tuan</i> An analysis of raft thickness in high-rise buildings - case studies	13
<i>Фаренюк Г.Г., Немчинов Ю.І., Бамбура А.М., Шейніч Л.О., Миколаєць М.Г., Мудрик М.С.</i> Зміна повітропроникності важкого бетону у часі	25
<i>Vazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Transitional regimes under route to chaos in vibroimpact system	37
<i>Makhinko A.V., Makhinko N.O.</i> Some aspects of vertical cylindrical shells' calculation at the unsymmetrical load	46
<i>Semchuk I.Y., Nilova T.O.</i> Stress-strain state of beam corrugated web under patch loading	53
<i>Daurov M.K., Bilyk A.S.</i> Providing of the vitality of steel frames of high-rise buildings under action of fire	62
<i>Morhun S.</i> Gas turbine impellers free vibration study using the fem analysis	69
<i>Мірошніков В.Ю.</i> Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною	77
<i>Ловейкін В.С., Почка К.І., Ромасевич Ю.О., Почка О.Б.</i> Динамічний аналіз роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним привідним механізмом	91
<i>Гревцев О.К., Селіванова Н.Ю.</i> Напружено-деформований стан і рівняння вертикального руху порожнистого тіла обертання – диска під дією електромагнітних полів	109
<i>Сафронов О.В., Семон Б.Й., Неділько О.М., Горіна А.О.</i> Коливання аеродинамічних конструкцій: безпечний діапазон швидкостей	121
<i>Солодей І.І., Петренко Е.Ю., Затилюк Г.А.</i> Особливості створення розрахункових моделей при дослідженні напружено-деформованого стану підземних споруд	139

<i>Datsenko I.P., Kotsiuruba V.I., Mirnenko V.I., Tkach I.M., Tryhubenko S.S., Shyshanov M.O.</i> Control of the strength properties of welded connections in the manufacture of building steel structures	150
<i>Лук 'янченко О.О., Бурау Н.І., Костіна О.В., Геращенко О.В.</i> Модальний аналіз захисної ємності резервуара з урахуванням послідовного виникнення дефектів у зварних швах стінки	159
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.</i> Аналіз власних коливань тонких параболічних оболонок	171
<i>Гайдайчук В.В., Густєлев О.О., Радкевич А.В., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В.</i> Термопружне деформування шаруватого покриття на вгнутій ділянці дороги	180
<i>Лізунов П.П., Криксунов Е.З., Фесан О.М.</i> Напружено-деформований стан замкнених конічних оболонок при складному обертанні	191
<i>Палій О.М., Лук 'янченко О.О.</i> Частотний аналіз усталеного відгуку однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження	199
<i>Ковтун А.В., Табуненко В.О., Нестеренко С.І.</i> Моделі взаємодії високошвидкісного ударника з захисними перешкодами	207
<i>Ворона Ю.В., Кара І.Д.</i> Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності	220
<i>Козуб Ю.Г., Солодей І.І.</i> Використання МСЕ для обчислення термопружного стану автомобільних шин	232
<i>Гетун Г.В., Буценко Ю.П., Баліна О.І., Безклубенко І.С., Соломін А.В.</i> Дифузійні процеси з накопичувальними характеристиками при експлуатації будівель	243
<i>Максим 'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.</i> Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл	252

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД
STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES

Науково-технічний збірник
Scientific-and-technical collected articles

Випуск 102

Головний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 21.06.19. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк.
Тираж 100.

КНУБА
м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.
